Contando de dos formas distintas

Por Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Nivel Avanzado

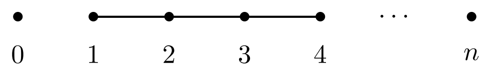
Introducción

En muchas ocasiones hay más de una forma de contar los elementos de un conjunto. A veces una de estas formas es más fácil de identificar, o incluso puede ser suficiente para responder un problema. Sin embargo, existen ocasiones en las que encontrar formas alternativas para contar los elementos de un conjunto nos ayuda a encontrar la solución de un problema, o bien, nos permite obtener resultados interesantes.
La técnica de doble conteo es muy poderosa. Sin embargo, una de las principales dificultades es que a veces no se ve fácilmente dónde podemos usarla. A través de la solución de varios problemas esperamos dar una mejor idea del tipo de situaciones donde se puede utilizar. Suponemos que el lector maneja los principios básicos de conteo. También usaremos la notación de suma y sus propiedades.
La idea principal es encontrar un conjunto que se pueda contar de dos formas distintas. Veremos un par de ejemplos introductorios y en la siguiente sección veremos algunos ejemplos más avanzados.

Ejemplo 1 *Demuestra que,*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Observemos los enteros de 0 a n en la recta numérica. ¿Cuántos segmentos podemos formar con extremos en estos puntos? Por un lado, cada una de las $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ parejas de puntos determina totalmente un segmento. Por otro lado, hay 1 segmento de longitud n, 2 segmentos de longitud $n-1$, y así, hasta n segmentos de longitud 1, obteniendo en total $\sum_{k=1}^{n} k$ segmentos. Como contamos la misma cosa, concluimos que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.



Ejemplo 2 *En un grupo de* 25 *personas se estudian* 7 *temas. Se sabe que a cada persona le gustan al menos dos temas. Demuestra que existe un tema que le gusta al menos a* 8 *personas.*

Como a cada persona le gustan al menos dos temas, sabemos que al menos hay $25 \cdot 2 = 50$ temas que le gustan a las personas (contando los temas repetidos). Estos 50 gustos los podemos repartir en 7 casillas, una por cada tema. Entonces por el principio de las casillas debemos tener que alguna tiene al menos 8, obteniendo lo que queremos.

El Principio de Doble Conteo

Todas las demostraciones por doble conteo se basan en el siguiente principio.

Principio de Doble Conteo. Si contamos la cantidad de objetos de cierto conjunto de una forma y resulta a y luego las contamos de otra forma y resulta b, entonces $a = b$.

Parece un principio muy sencillo y su demostración es igual de sencilla: ambos números son iguales pues tanto a como b son la cantidad de elementos en el conjunto. La utilidad del principio del doble conteo se basa en que encontremos dos formas *distintas* y *correctas* de contar los elementos de un conjunto. Un ejemplo es la manera en la que demostramos la fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos. Nos gustaría encontrar una fórmula similar para la suma de los primeros n cuadrados. Pero antes de hacer esto, vamos a usar el Principio de Doble Conteo para demostrar algunas identidades de coeficientes binomiales.

Ejemplo 3 *Para cada pareja de enteros* m, n *con* $0 \leq m \leq n$ *se tiene que,*

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Si tenemos n objetos y queremos elegir m de ellos, por un lado podemos elegir los m que queremos de $\binom{n}{m}$ formas o los $n-m$ que no queremos de $\binom{n}{n-m}$ formas. De esta manera, obtuvimos dos maneras distintas y correctas de contar los subconjuntos de m elementos y por lo tanto $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.

Ejemplo 4 *Para cada entero no negativo* n *se tiene que,*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

En este caso contamos la cantidad de subconjuntos que hay de un conjunto con n elementos. Por un lado, cada uno de los n elementos tiene dos posibilidades: estar o no estar en el subconjunto y, por lo tanto hay 2^n subconjuntos. Por otro lado, hay $\binom{n}{k}$ subconjuntos con exactamente k elementos, y los subconjuntos pueden tener desde 0 hasta n elementos, de modo que hay $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ subconjuntos y obtenemos la igualdad deseada. Cabe aclarar que el conjunto vacío (aquel que no tiene elementos) es considerado como subconjunto.

Ejemplo 5 *Para cada entero positivo n se tiene que,*

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Consideremos ahora cuántos equipos con un líder se pueden hacer en un grupo con n personas. Por un lado, podemos comenzar eligiendo de entre las n personas al que será el líder. Luego, las $n-1$ personas restantes tienen dos opciones: estar o no estar en el equipo. De esta forma, podemos hacer $n2^{n-1}$ equipos con líder.
Por otro lado, podemos primero elegir cuántas personas tendrá el equipo (digamos k). Hay $\binom{n}{k}$ formas de elegir a las k personas y todavía hay que elegir quién de las k personas es el líder. Esta cuenta nos da $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ y por el Principio de Doble Conteo, obtenemos que $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Ejemplo 6 *Para cada pareja de enteros no negativos m, n se tiene que,*

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

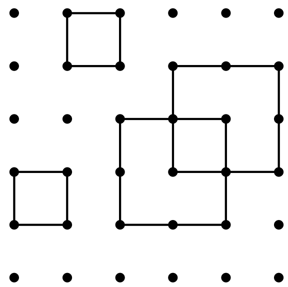
¿De cuántas formas podemos colocar m pelotas verdes indistinguibles y $n+1$ pelotas azules indistinguibles en línea?
Por un lado, de las $n+m+1$ posiciones que van a ocupar las pelotas, podemos elegir $n+1$ de ellas para que las ocupen las azules, y esto nos determina dónde quedan las verdes, de modo que por un lado la respuesta es $\binom{n+m+1}{n+1}$.
Pero desglosando los acomodos posibles, la *última* bola azul puede quedar en las posiciones $n+1, n+2, \ldots, n+m+1$. Si queda en la posición $n+k+1$, las otras n pelotas azules que quedan por acomodar deben quedar en las primeras $n+k$ posiciones, lo cual podemos hacerlo de $\binom{n+k}{n}$ formas, y esto ya determina el acomodo. Sumando sobre las posibles k, desde 0 hasta m, obtenemos la identidad.

Como se ve en estos ejemplos, tenemos que encontrar un conjunto adecuado para contar. En los casos en los que tenemos una identidad a demostrar, a veces alguno de los lados nos da una pista de qué conjunto podemos utilizar. Sin embargo, no siempre es sencillo encontrar este conjunto, de modo que veremos algunos ejemplos en los cuales tenemos que hacer una elección más elaborada. Veremos primero cómo podemos demostrar la fórmula de la suma de los primeros cuadrados contando de dos formas distintas.

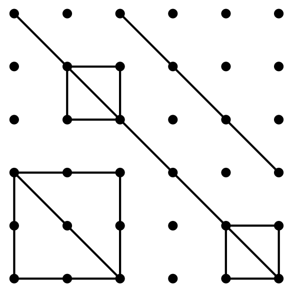
Ejemplo 7 *Para cada entero positivo n se tiene que,*

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Lo primero que nos gustaría es encontrar una situación en que la cantidad de objetos que tenemos sea alguno de los lados de nuestra ecuación. Para esto consideraremos $(n+1)^2$ puntos acomodados en cuadrado como en la figura. Contaremos cuántos cuadrados podemos hacer con vértices en estos puntos de forma que queden con los lados parelelos al cuadrado original. La primera forma en la que los contaremos, será por la longitud de su lado. Dicha longitud puede ir desde 1 hasta n. Hay 1 cuadrado con lado n, hay 4 con lado $n-1$, 9 con lado $n-2$ y así, hasta obtener n^2 de lado 1. Esto muestra que tenemos $\sum_{i=1}^{n} i^2$ cuadrados.



No es tan sencillo encontrar otra forma de contar los cuadrados. Tras intentar un poco, se puede pensar en lo siguiente: observemos la diagonal del cuadrado que pasa por el punto superior izquierdo y el inferior derecho. Hay otros $2(n-1)$ segmentos paralelos a esa diagonal que tienen vértices en la figura. Así, otra forma de determinar un cuadrado es elegir una de estas líneas y elegir dos puntos en ella. Esos formarán respectivamente la esquina superior izquierda e inferior derecha de un cuadrado.



Hay dos de esas líneas con 2 puntos, dos líneas con 3 puntos, y así sucesivamente, hasta dos líneas con n puntos y sólo una línea con $n+1$ puntos. De modo que podemos elegir dos puntos como queremos de,

$$2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{2+k}{2}+\binom{n+1}{2}$$

formas. Pero ya habíamos encontrado expresiones más simples para esto en un ejemplo anterior (ver Ejemplo 6), de donde obtenemos,

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{2+k}{2}+\binom{n+1}{2} &= 2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}\\
&= 2\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+\frac{(n+1)n}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Vamos a ver un último ejemplo. Si sumamos los números de las *diagonales* del Triángulo de Pascal, como en la siguiente figura, obtenemos una sorpresa, pues vamos encontrando los números de Fibonacci[2]. Demostraremos que esto siempre sucede usando doble conteo.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & 8 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & 34 & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}$$

Ejemplo 8 *La siguiente identidad se cumple para todo entero* $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n-k}{k}=F_{n+1},$$

donde $\lfloor x \rfloor$ *denota el mayor entero que es menor o igual que* x.

Consideraremos un tablero de $1\times(n+1)$. Coloquemos una ficha en la casilla de hasta la izquierda. ¿De cuántas formas podemos llevar la ficha a la casilla de hasta la derecha si podemos movernos uno o dos espacios hacia la derecha en cada movimiento?

[2]Los números de Fibonacci están definidos por las relaciones $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 2$

Primero, demostraremos por inducción que se puede de F_{n+1} formas. Nuestra base de inducción necesitará verificar dos casos. Para un tablero de 1×1 sólo podemos quedarnos donde estamos, así que únicamente es $1 = F_1$ forma. Para un tablero de 1×2, lo único que se puede hacer es moverse un espacio a la derecha, de modo que también hay $1 = F_2$ forma. Ahora, si tomamos un tablero de $1 \times n$ con $n \geq 3$, tenemos dos opciones: llegar a la casilla $n-1$ y de ahí avanzar 1, o bien llegar a la casilla $n-2$ y de ahí avanzar 2. Así, por hipótesis inductiva hay F_{n-1} y F_{n-2} opciones, respectivamente, y su suma es F_n, como buscábamos.
Ahora encontraremos otra forma de describir esos recorridos. Observemos cuántos pasos de 2 cuadritos podemos hacer. Pueden ir desde 0 hasta $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Si decidimos hacer k pasos de 2 espacios, hay que dar $n-2k$ pasos de 1 espacio para llegar. En total damos $n-k$ pasos, y sólo queda por decidir en qué orden darlos. Puedo elegir cuáles de los $n-k$ saltos son los dobles y esto se puede hacer de $\binom{n-k}{k}$ formas. Finalmente, sumando sobre las posibles k, obtenemos la identidad deseada.

La notación de las parejas

Las demostraciones de doble conteo comparten en común que se pueden escribir en términos de contar parejas de cosas. Consideremos la siguiente forma de escribir la solución del segundo problema que vimos.

Contemos las parejas (p, m) donde p es una persona y m es una materia que le gusta a p. El problema nos pide que encontremos al menos 8 parejas con la misma segunda coordenada. De acuerdo con la hipótesis del problema, para cada p fija tenemos al menos 2 parejas, de modo que tenemos al menos 50 parejas. Para la segunda coordenada, tenemos únicamente 7 opciones, de modo que por el principio de las casillas, hay al menos 8 parejas con la misma segunda coordenada, tal como queríamos.

Consideremos un ejemplo más. Dado un conjunto fijo C de n elementos, contaremos la cantidad de parejas $(S, |S|)$, donde S es un subconjunto y $|S|$ es la cantidad de elementos que tiene. Como cada subconjunto tiene una cantidad fija de elementos, hay exactamente una pareja por cada uno de los 2^n subconjuntos de C. Por otro lado, dejando fijo $|S| = k$, sabemos que tenemos $\binom{n}{k}$ subconjuntos, y los valores de k varían de 0 a n. Esto nos dice que la cantidad de parejas son $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, demostrando de nuevo una identidad que ya teníamos antes.

Ésta es simplemente una forma más de escribir demostraciones por doble conteo. Vamos a enunciar el Principio de Doble Conteo con esta notación.

El Principio de Doble Conteo con notación de las parejas.
Consideremos dos conjuntos finitos I e J. Supongamos que tenemos algunas de las parejas (i, j) con $i \in I$ y $j \in J$. Denotemos por a_i la cantidad de estas parejas con primera coordenada igual a i y b_j la cantidad estas de parejas con segunda coordenada igual a j. Entonces $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j$.
Ambas sumas son la cantidad de parejas (i, j) que tomamos.

Es posible que hasta ahora no se vea la ventaja de usar este método, sin embargo ayuda bastante en la claridad a la hora de escribir la solución de un problema. Las soluciones de los siguientes problemas pueden escribirse como lo hicimos en la sección pasada, pero la solución usando parejas expresa la idea de una manera más clara.

Como primer ejemplo, encontraremos la suma de los términos de una progresión geométrica de razón 2.

Ejemplo 9 *Demuestra que si n es un entero positivo, entonces,*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

Vamos a poner a 2^{n+1} jugadores en un torneo. En la primera ronda, juegan por parejas y el ganador de cada pareja pasa a la siguiente ronda, y así sucesivamente hasta que haya un ganador. Contaremos las parejas (p, r), donde r es una de las $n + 1$ rondas y p es una de las personas que perdió en esa ronda. Si fijamos la primera coordenada, sólo puede haber una ronda en la cual pierde una persona. Como al final hay un ganador, en total hay $2^{n+1} - 1$ parejas, una por cada persona que perdió.

Por otro lado, en la primera ronda hay 2^n perdedores, en la segunda 2^{n-1} perdedores y así, hasta que en la última ronda sólo hay un perdedor. Así, $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

El siguiente problema ilustra un poco mejor cómo podemos aprovechar esta técnica en problemas tipo olimpiada.

Ejemplo 10 *Se tiene un $2010-$ágono regular. Se pintan 1005 de sus vértices de rojo y los otros de azul. Demuestra que se pueden elegir dos polígonos de 503 vértices, uno con vértices rojos y el otro con vértices azules, de modo que sean congruentes.*

Primero numeramos los vértices del polígono $1, 2, \ldots, 2010$ en el sentido de las manecillas del reloj. Consideremos una coloración fija del $2010-$ágono. Contaremos las parejas (i, j) tales que $1 \leq i \leq 2010$, $1 \leq j \leq 2009$ y el vértice en la posición i es de color distinto al vértice en la posición $i + j$ (módulo 2010).

Para cada i, hay 1005 valores para la segunda coordenada (uno por cada punto del otro color que el vértice en i). Así, tenemos $2010 \cdot 1005$ parejas. Pero debemos obtener la misma cantidad de parejas si contamos dejando las j fijas. Como la segunda coordenada tiene sólo 2009 posibilidades, por el principio de las casillas (ver en el apéndice el teorema 3) hay al menos $\left\lfloor \frac{2010 \cdot 1005}{2009} \right\rfloor + 1 = 1006$ parejas con la misma segunda coordenada, digamos j'. De estas 1006, otra vez por el principio de las casillas, hay al menos 503 con el vértice i correspondiente del mismo color. Por la forma en que construimos las parejas, podemos rotar el polígono formado por estos 503 vértices i en j' unidades y obtener un polígono congruente al primero, pero del otro color, tal como queríamos.

Ejercicios

1. Demuestra que para cada par de enteros m, n con $0 \leq m \leq n$ se tiene que,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

2. Reescribe algunas de las demostraciones escritas con el método general usando la notación de las parejas y viceversa.

3. Si n, r y k son enteros positivos tales que $n \geq r \geq k$, demuestra que,

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

4. Demuestra que si n y m son enteros positivos entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} m^k = \frac{m^{n+1}-1}{m-1}.$$

5. Para cada entero positivo n demuestra que,

$$n! = n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \binom{n}{3}(n-3)^n + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}.$$

Bibliografía

1. T. Andreescu, B. Enescu. *Mathematical Olympiad Treasures.* Birkhäuser, 2004.

2. L.I. Martínez Sandoval. *Estrategias básicas de conteo.* Tzaloa No. 2, 2011, pp. 1-14.

3. M.L. Pérez Seguí. *Combinatoria Avanzada.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM 2010.