Estrategias básicas de conteo

Por Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Nivel Intermedio

"Poco a poco fui volviéndome habilísimo en este arte. Al cabo de unos meses - gracias a nuevos y constantes ejercicios contando hormigas y otros insectos- llegué a realizar la proeza de contar todas las abejas de un enjambre".

Beremiz Samir en *El hombre que calculaba*

Una de las habilidades más útiles a la hora de resolver problemas de combinatoria en la Olimpiada de Matemáticas es saber contar bien. Al comenzar en la olimpiada tenemos un entendimiento básico de qué quiere decir "contar cosas". Usualmente nuestra intuición sirve muy bien durante las primeras etapas, pero rápidamente nos damos cuenta que es necesario desarrollar nuevas técnicas que nos permitan contar cosas de manera simplificada.

En este artículo haremos un recordatorio de las técnicas de conteo básicas. Comenzaremos por ver problemas de primeras etapas. En estos problemas tenemos la ventaja de que podemos hacer cuentas explícitas, es decir, como resultado podemos dar un número, y también muchas veces basta con enlistar los objetos que tenemos que contar. Después de esto introduciremos las dos reglas principales para contar: la regla de la suma y la regla del producto. A partir de estas dos reglas se hace la mayor parte del conteo. Tras ver algunos ejemplos de estas reglas, llegaremos a otras herramientas usadas frecuentemente, como las permutaciones y las combinaciones. En la sección final, "Divide y Conquista", veremos cómo incorporar todas las técnicas de conteo *estándar* para resolver problemas más difíciles.

Recuerda que como en cualquier otro tema, la única forma de entenderlo bien es resolviendo los problemas. Es por eso que cada tema tiene problemas para que puedas practicar.

Enlistar los objetos

Vamos a comenzar con el siguiente problema:

Ejemplo 1 *¿De cuántas formas podemos hacer una palabra de dos vocales distintas?*

La técnica más básica que existe para contar objetos es enlistarlos y contar cuántos elementos tiene la lista. Esta técnica es útil cuando las cosas que tenemos que enumerar son pocas.
Cuando usamos esta técnica, queremos asegurarnos de que todos los objetos que queremos contar aparezcan en la lista. Es por esto que resulta útil dar a los objetos que contamos un cierto orden y enlistarlos siguiendo este orden. Para el problema que planteamos, tenemos un orden natural, el orden "lexicográfico". Acomodando las palabras que queremos contar como si aparecieran en un diccionario, podemos enlistarlas como sigue:

AE AI AO AU EA EI EO EU IA IE IO IU OA OE OI OU UA UE UI UO

Tras contar los elementos aquí, vemos que son 20. En este ejemplo tuvimos dos ventajas. Una es que ya teníamos un orden natural para los elementos. La otra, que los objetos que contamos ya tenían una forma fácil de representarlos por escrito. En otros problemas, nosotros debemos elegir nuestro orden y nuestra notación. Consideremos otro problema en el cual enfrentaremos estas dos dificultades.

Ejemplo 2 *Se tienen 6 niños. Se elegirán 3 para que trabajen en Geometría. Los otros 3 trabajarán en Combinatoria. ¿De cuántas formas pueden quedar divididos?*

Imaginemos que queremos enumerar todas las posibilidades para los equipos. Una primera observación es que nada más necesitamos elegir a los 3 niños que trabajarán en Geometría, pues ya sabemos que los otros trabajarán en Combinatoria.
Tenemos que encontrar una forma adecuada de referirnos a los niños por escrito. Una opción sería darles nombres, pero esto sería engorroso, pues una configuración tendría que ser algo del estilo "Mario", "Luis", "Karen". Algo que resulta más práctico es olvidarnos de que son niños y simplemente referirnos a ellos por número, digamos 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Esta notación nos da la ventaja de que los números, como las palabras, también tienen un orden por sí mismos. Una última observación que tenemos que hacer es que en este caso no nos importa en qué orden elegimos los niños, pues el equipo 123 es el mismo equipo que el 213 o el 132. Una manera de enlistar a los equipos de Geometría es primero poner a los que tengan al niño 1, luego a los que tengan al 2 y no al 1, luego los que tengan al 3 y no al 1 ni dos y finalmente los que tengan al 4, pero no al 1, 2 ni 3. Obtendremos una lista como la siguiente:
123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356 y 456. En esta lista ya podemos contar que hay 20 formas posibles de hacer equipos.
A partir de este momento ya se empiezan a ver otras dificultades de intentar enumerar todos los objetos que queremos contar. Una vez que el problema comienza a hacerse

más grande, es más dificil enlistar todas las posibilidades y asegurarse que realmente sean todas. Es por esto que necesitamos encontrar formas más generales de contar. Perderemos la ventaja de poder *ver* todos los objetos posibles a cambio de poder *argumentar* conteos más grandes.

Problemas

1. ¿De cuántas formas podemos escribir a 6 como suma de algunos enteros positivos si no importa el orden de los sumandos? ¿Y si sí importa?
2. ¿Cuántas diagonales tiene un heptágono?
3. Entre 1 y 100, ¿cuántos múltiplos de 7 hay que no sean múltiplos de 3?
4. ¿Cuántas veces al día se cruzan las manecillas de un reloj?
5. ¿Cuántos números primos hay entre 50 y 100?

Dividir en casos y la regla de la suma

Hay ocasiones en las que es fácil contar objetos siempre y cuando tengamos una condición adicional. Hay algunas otras ocasiones en las cuales para ordenar el conteo nos conviene organizar a los objetos en categorías. En ambos casos la filosofía será transformar un problema grande en problemas más pequeños. Aprovecharemos las respuestas de esos problemas más pequeños para obtener la solución del problema original. Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3 *¿Cuántos triángulos isósceles distintos existen con lados enteros y cuyo perímetro sea menor o igual a* 10*?*

Para asegurarnos de considerar todos los triángulos hay que contar de una manera ordenada. ¿Hay algún elemento del problema que podamos dejar fijo para tener problemas más pequeños? Una opción podría ser dividir en casos según el tamaño de los lados iguales, al cual llamaremos t. Considerando la restricción del perímetro y la restricción de la desigualdad del triángulo[1] procedemos de la siguiente manera.

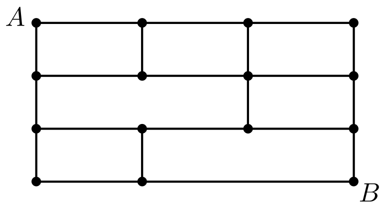
- Si $t = 1$, entonces el tercer lado sólo puede medir 1, pues un valor mayor no cumpliría la desigualdad del triángulo.
- Si $t = 2$, entonces el tercer lado puede medir 1, 2 ó 3.
- Si $t = 3$, entonces el tercer lado puede medir 1, 2, 3 ó 4, pues hay que cuidar la restricción del perímetro.
- Si $t = 4$, entonces el tercer lado puede medir 1 ó 2.
- Si $t > 4$, entonces no hay triángulos que cumplan lo requerido, pues su perímetro es al menos 11.

[1] Ver en el apéndice el Teorema 18.

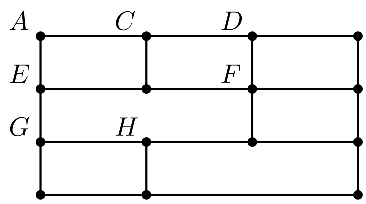
Tenemos una lista con los posibles casos y cuántas opciones hay en cada uno de ellos: 1, 3, 4 y 2. ¿Qué hacemos con estos números? Sumarlos, obteniendo de resultado 10. Después de dividir en casos debemos de sumar las posibilidades de todas las opciones, para obtener el total de formas en el problema original. En este problema, la ventaja al fijar t es que en los problemas más pequeños es fácil asegurar que contamos todas las posibilidades.
Veamos otro problema en el cual es útil hacer este truco.

Ejemplo 4 *1. ¿Cuántos rectángulos hay en la siguiente figura?*

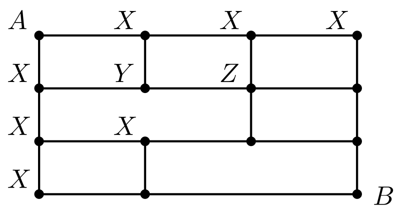
2. Si se permite caminar sobre los segmentos de la figura sólo hacia la derecha y hacia abajo, ¿cuántos caminos hay del vértice A al vértice B?



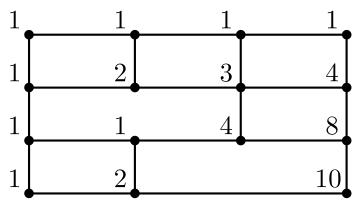
Una primera respuesta al primer inciso puede ser que hay 7, sin embargo, estos sólo son algunos de los rectángulos que se forman. Hay algunos otros que tienen líneas adentro. Intentar contarlos a simple vista es complicado pues es difícil marcar cuáles rectángulos ya hemos contado y cuáles no. Sin embargo, podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿qué vértices pueden ser *la esquina superior izquierda* de un rectángulo? En la siguiente figura se marcan todos los vértices que pueden tener esta propiedad:



Cambiemos el problema original a un problema más pequeño: ¿cuántos rectángulos tienen a A como esquina superior izquierda? Esta es una pregunta más fácil de responder, y rápidamente se puede verificar que hay 6 de estos rectángulos. Haciendo lo mismo con los vértices C, D, E, F, G y H obtenemos 2, 2, 3, 1, 2 y 1 rectángulos respectivamente. Esto nos da un total de 17 rectángulos. Una vez más, dividir en casos nos permitió resolver un problema atacando problemas más sencillos.
La regla de la suma también se puede aplicar varias veces conforme conozcamos más información del problema. Veamos cómo se aplica esta observación a la resolución de la segunda parte del problema. Primero, en la siguiente figura responderemos el problema más sencillo de encontrar de cuántas formas podemos llegar desde A a alguno de los vértices marcados con X caminando sólo hacia la derecha y hacia abajo.



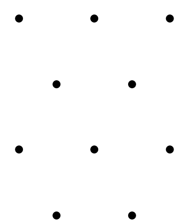
Unos segundos de reflexión bastarán para convencernos de que sólo hay una forma de llegar a dichos vértices. Responder esta pregunta fue muy fácil. Ahora, ¿cómo contamos las formas en las que podemos llegar al vértice Y? Tenemos dos opciones para haber llegado a Y, llegar por arriba o llegar por la izquierda. Esto nos da dos formas de llegar a Y.
Al hacer lo mismo con Z llegamos a una conclusión similar, sólo que ahora tenemos dos formas de llegar a Z por la izquierda (las dos formas de llegar a Y y luego pasar a Z) y una forma de llegar por arriba, dando un total de 3 formas de llegar.
Así, simplemente debemos seguir *sumando* las opciones izquierda y superior en los vértices para llegar a la Figura 4 y encontrar que el total de caminos es 10.



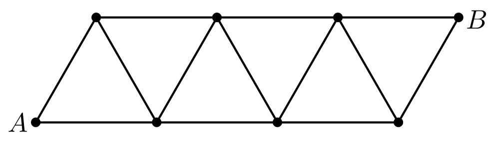
La regla de la suma es **sólo** la primera de las dos reglas básicas de conteo. La limitación que tiene es que cuando dividimos en casos, éstos son ajenos, pero a veces nos gustaría poder tomar varias decisiones compatibles. La regla del producto, que veremos a continuación, maneja estas situaciones.

Problemas

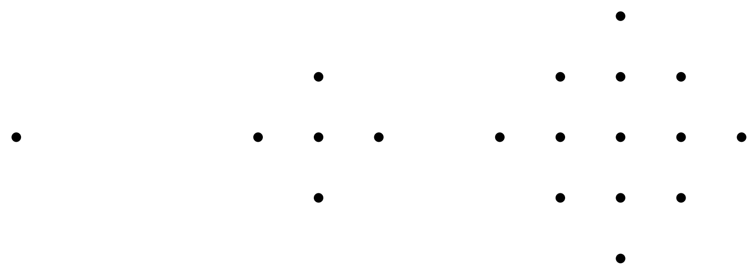
6. ¿De cuántas formas podemos elegir 3 puntos alineados en el siguiente acomodo de puntos?



7. Considera la siguiente figura. ¿Cuántos caminos existen del vértice A al vértice B tales que nunca avancen hacia la izquierda?



8. Considera los 27 cubitos unitarios que forman un cubo de $3 \times 3 \times 3$. ¿De cuántas formas es posible tomar tres de ellos con sus centros alineados?
9. ¿Cuántos enteros positivos menores a 10000 cumplen que el producto de sus dígitos es 36?
10. ¿Cuántos puntos habrá en la figura del paso 50?



Decisiones compatibles y la regla del producto

Ejemplo 5 *En el restaurante "Platillos Olímpicos" se puede pedir una comida corrida que consta de* 3 *tiempos. Hay que elegir si el primer platillo va a ser sopa de fideo, consomé o ensalada. Hay que elegir si el segundo platillo va a ser arroz o espaguetti. Hay cuatro tipos de platillos principales: milanesa empanizada, filete de pescado a la mantequilla, lasagna de verduras o enchiladas suizas. Además, se puede pedir agua de tamarindo o agua de horchata. Durante* 7 *semanas Leo fue a comer a "Platillos Olímpicos". Muestra que forzosamente repitió su comida alguna vez.*

En esta ocasión la pregunta no es directamente acerca de conteo, pero todo indica que el camino adecuado es contar cuántas formas distintas de comer existen. Si logramos ver que son menos de 49, el número de días en 7 semanas, demostraremos lo que se quiere.

Una vez más, enlistar todas las posibilidades es una opción. Por ejemplo, si sólo nos fijamos en el primer platillo y el tipo de agua, hay 6 posibilidades: FT, FH, CT, CH, ET, EH. La observación crucial antes de empezar a hacer una larga lista de

las posibilidades es que cada opción de primer platillo *es compatible con* cada opción de agua. Es decir, hay 3 opciones de primer platillo y *para cada una de ellas* hay 2 opciones de agua, de modo que tenemos en total $3 \cdot 2 = 6$ opciones.
Incorporándo todos los tiempos de la comida, podemos ver de manera similar que en total tenemos $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ formas distintas de pedir comida. Por el *Principio de las Casillas*[2], tras 49 días Leo tuvo que repetir.
Al igual que con la regla de la suma, en ocasiones tenemos que ir incorporando a nuestra cuenta cierta información que vayamos obteniendo conforme fijamos elementos en el problema.

Ejemplo 6 *¿De cuántas formas podemos elegir de entre* 10 *actores al protagonista, al acompañante y al malo de una película?*

Una vez más, tenemos un problema en el cual tenemos que tomar decisiones *compatibles*. Lo primero que podríamos hacer es elegir al protagonista. Esto se puede hacer de 10 formas distinas. Sin embargo, una vez que escogemos al protagonista debemos elegir a alguna de *las otras* 9 personas como su acompañante. Ya que tomamos a estos dos personajes, todavía hay que elegir al malo de la película, para el cuál quedan únicamente 8 opciones. Como tenemos que elegir al protagonista, *y luego* al acompañante *y luego* al malo, y estas opciones son compatibles, tenemos un total de $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ posibilidades.
Aquí vale la pena mencionar que hemos asumido implícitamente que el protagonista, el acompañante y el malo de la película son personas distintas.
En ocasiones hay que inventar las decisiones compatibles que se deben de tomar. Es decir, el problema puede parecer preguntar de cuántas formas se puede hacer *una* cosa, lo cual es difícil de responder. En este caso, hay que transfomar nuestra decisión *única* en *muchas* decisiones pequeñas que son fáciles de contar.

Ejemplo 7 *Se tienen* 20 *programadores. Programan en Python, Java o C. Nadie programa en los* 3 *lenguajes y cada quien programa en al menos un lenguaje. ¿De cuántas formas puede pasar esto?*

Intentar enlistar todas las posibilidades en este problema tomaría mucho tiempo. Otra opción es decidir para cada lenguaje qué personas lo sabrán. Sin embargo, al seguir esta idea nos encontramos con la dificultad de no poder meter todas las hipótesis con facilidad. En vez de esto, podemos decidir por cada programador en qué lenguajes puede programar. Para un programador hay 6 opciones de lenguajes de programación que puede saber: P, J, C, PJ, PC o JC. Así, el primer programador tiene 6 opciones. Para cada una de estas opciones, el segundo programador tiene 6 opciones. Siguiendo así, vemos que debemos multiplicar veinte veces el 6, de modo que hay 6^{20} formas en las cuales los programadores del grupo pueden saber los lenguajes.

Problemas

11. Un número es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. ¿Qué hay más, números capicúas de 7 dígitos o de 8 dígitos?

[2] Ver en el apéndice el Teorema 7.

12. En un juego de mesa se tienen varias tarjetas. En cada tarjeta está marcada una de 5 figuras. Esta figura puede ser de uno de cuatro colores. Además, la tarjeta tiene un número de 1 a 9. En cada turno se pone una tarjeta en la mesa que cumpla cierta condición. Esta condición garantiza que al menos un cuarto de las tarjetas se puedan poner. Después de haber puesto 30 tarjetas, aproximadamente ¿cuántas se pueden poner?

13. ¿Cuántos equipos distintos se pueden formar en un salón con n niños? ¿Cuántas palabras de n letras, cada una de ellas a o b, existen?

14. ¿De cuántas formas se pueden poner tres fichas de dominó consecutivas?

15. En un examen cada una de las 6 preguntas tiene 3 opciones. Si un alumno contesta el examen totalmente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga al menos la mitad de las preguntas bien?

Asignaciones, permutaciones y combinaciones

La regla de la suma y la regla del producto realmente son las herramientas más versátiles de conteo. Hay que aprender a utilizarlas en una gran cantidad de situaciones y no deben de subestimarse. Sin embargo, hay otras técnicas de conteo estándar que se deducen a partir de las reglas de la suma y del producto, y que frecuentemente se usan para contar cosas en problemas de olimpiada. Veremos primero ejemplos de cuándo usar estas herramientas y luego las enunciaremos en general.

Ejemplo 8 *¿Cuántos números de cuatro dígitos tienen todos sus dígitos impares?*

Esta es una aplicación directa de la regla del producto. Cada uno de los 4 dígitos tiene 5 opciones, ser 1, 3, 5, 7 ó 9, y cada elección de dígito es compatible con las demás. Así, hay 4^5 números que cumplen esta condición.
La situación en general es la siguiente. Se tienen n objetos tales que cada uno de ellos se puede clasificar en exactamente uno de m tipos. Es posible que haya más de un objeto de un mismo tipo. Como para cada uno de los n objetos hay m posibilidades, en total tenemos m^n formas de clasificar los objetos.

Ejemplo 9 *¿Cuánto suman los números de 5 dígitos que tienen exactamente un 1, un 2, un 3, un 4 y un 5?*

Esta es una pregunta un poco más complicada. Para simplificar el problema vamos a dividir la suma total como sigue. En primer lugar, veremos en cuánto colaboran los dígitos de las unidades de todos estos números. En algunos de estos números aparece el 1 como dígito de las unidades. ¿En cuántos? Formaremos números que terminen en 1. Para contar cuántos números de estos tenemos, usaremos la regla del producto. El dígito de las decenas ahora sólo tiene 4 valores posibles: 2, 3, 4 ó 5. Una vez que fijemos el dígito de las decenas, el de las centenas sólo tiene 3 valores posibles. Siguiendo así, vemos que hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ números que terminan en 1. Así mismo, hay 24 números que terminen en 2, 3, 4 y 5. De modo que las unidades colaboran con

$(1+2+3+4+5) \cdot 24 = 360$ a la suma total. De manera similar, podemos ver que los dígitos de las decenas colaboran con $(10+20+30+40+50) \cdot 24 = 3600$. Siguiendo así, vemos que la suma total es $360 + 3600 + 36000 + 360000 + 3600000 = 3999960$.
La parte que nos interesa del problema es que queremos poner en orden algunos objetos. En el problema, una vez que fijábamos algún dígito, los otros podrían acomodarse de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ formas. En el problema en general, tenemos n objetos distintos que queremos acomodar en una línea. Usando la regla del producto, en la primer posición de la línea podemos poner cualquiera de los n objetos. En la siguiente posición, ya sólo tenemos $n-1$ posibilidades. Siguiendo así, la penúltima posición sólo podrá ser ocupada por uno de 2 objetos y el objeto en la última quedará totalmente determinado. Esto nos da un total de $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ formas de acomodar estos objetos en una línea. Para no escribir un producto tan largo, usualmente se abrevia como $n!$ y se lee "n factorial". A estas formas de acomodar objetos distinguibles en una línea se les conoce como permutaciones.

Ejemplo 10 *Cuando se desarrolla la multiplicación $(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)(x+c)$, ¿en cuántos sumandos el exponente de x es 3?*

Ejemplo 11 *Se tienen 8 pelotas blancas, 3 pelotas negras y una pelota gris. ¿De cuántas formas se pueden colocar en una fila si lo único que nos importa es de qué color son?*

Cada sumando de la multiplicación del primer problema se obtiene eligiendo una de las dos letras de cada paréntesis. Así, tenemos 2^5 sumandos. ¿Cómo le hacemos para ver en cuántos de estos el exponente de x es 3? Para que un sumando tenga el exponente de x igual a 3 necesitamos que en tres de los paréntesis multipliquemos las x y en los otros 2 no. Entonces, para encontrar un sumando con x^3 es necesario *elegir* 3 de los 5 factores, para que en ellos tomemos la x y en los otros dos no. De modo que para responder la pregunta tenemos que saber de cuántas formas podemos elegir 3 objetos diferentes de entre 5 objetos. Por el momento no conocemos esta cantidad, pero temporalmente la llamaremos $\binom{5}{3}$. En un momento veremos cómo calcular este número.
Para resolver el segundo problema tenemos una situación similar. Usaremos la regla del producto. Pensemos en los 12 lugares que ocuparán las pelotas. La pelota gris tiene 12 posibles lugares que puede ocupar. Como en las otras pelotas únicamente nos importa el color, no es un simple problema de permutaciones. Sin embargo, si de los 11 lugares restantes *elegimos* 8 para que en ellos queden las pelotas blancas, entonces tendremos determinado completamente el acomodo. Es decir, nuestro problema ya nada más necesita saber de entre 11 objetos, de cuántas formas podemos elegir 8 de ellos. Llamemos temporalmente a este número $\binom{11}{8}$.
Queremos encontrar una fórmula que podamos calcular para $\binom{5}{3}$ y para $\binom{11}{8}$. Más aún, planteemos el problema en general. Tomemos números enteros n y k con $0 \leq k \leq n$. Si tenemos los números del 1 al n podemos preguntarnos de cuántas formas podemos *elegir* k de ellos distintos sin que nos importe el orden. Llamemos $\binom{n}{k}$ a este número. Hay muchas formas de determinar el valor de $\binom{n}{k}$, pero a continuación mostramos una basada en el principio de doble conteo.

Retomemos una pregunta de permutaciones: ¿De cuántas formas podemos acomodar los números del 1 al n en una fila? La respuesta era $n!$. Sin embargo, hay otra forma válida de contar las maneras de acomodar a estos números en una fila.
Por ejemplo, otro procedimiento que determina completamente cómo acomodar los números del 1 al n en una fila es el siguiente. Primero, decidimos de entre los n números cuáles van a ser los primeros k en la fila. De acuerdo con la notación que estamos utilizando, tenemos que elegir k de entre n números, de modo que lo podemos hacer de $\binom{n}{k}$ formas. *Para cada forma* de elegir estos k números, ahora tenemos que decidir en qué orden quedarán, lo cual se puede hacer de $k!$ formas. Finalmente, los últimos $n-k$ números ya se sabe cuales son, pero aún hay que ordenarlos, lo cual se puede hacer de $(n-k)!$ formas. Así, usando la regla del producto tenemos que hay $\binom{n}{k}k!(n-k)!$ formas de acomodar a los números del 1 al n en una fila.
Aquí viene el punto clave del Principio de Doble Conteo. Con una cuenta, tenemos que hay $n!$ acomodos. Con otra, tenemos que hay $\binom{n}{k}k!(n-k)!$ acomodos. ¿Es esto un error? No! Al obtener dos números con formas distintas y correctas de contar una misma cosa, llegamos a la conclusión de que tienen que ser iguales. De modo que la conclusión que sacamos de todo esto es que $n! = \binom{n}{k}k!(n-k)!$, de donde se deduce una fórmula explícita para las *combinaciones*: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. A los números de este tipo se les conoce como *coeficientes binomiales* y la notación $\binom{n}{k}$ se lee "n en k". Es muy importante recordar el significado combinatorio de los coeficientes binomiales, no sólo la fórmula para obtenerlos explícitamente.
Regresando a los problemas planteados, hay $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ términos que tengan a x^3 y hay $12\binom{11}{8} = 12\frac{11!}{8!3!} = 12 \times 165 = 1980$ formas de acomodar las pelotas en una línea si sólo nos importa el color.
En la siguiente sección veremos cómo podemos combinar todas estas técnicas para resolver problemas más complicados.

Problemas

16. ¿De cuántas formas se pueden sentar n personas en una mesa circular? Dos acomodos son iguales si al girar la mesa quedan iguales.

17. ¿Cuántos números de cinco dígitos distintos hay?

18. ¿De cuántas formas se pueden colocar 8 torres en un tablero de ajedrez sin que puedan atacarse entre sí? (Una torre de ajedrez puede atacar a piezas en su misma fila o columna).

19. ¿Cuántas parejas de subconjuntos ajenos de números del 1 al 20 hay? (Dos subconjuntos son ajenos si no tienen elementos en común).

20. ¿De cuántas formas se puede emparejar a 8 personas?

21. Encuentra algo que se pueda hacer de $3!\,7!\,11! + 2^5 + \binom{8}{4}$ formas.

22. Se tienen 4 libros de álgebra, 5 libros de combinatoria, 3 libros de teoría de números y 2 libros de geometría. ¿De cuántas formas se pueden poner en un estante si sólo nos importa de qué tema son?

Divide y Conquista

Una vez que tienes práctica suficiente con las técnicas mencionadas anteriormente, aún hay una habilidad muy importante por aprender para poder contar bien. Los problemas de olimpiada rara vez consistirán en aplicar de golpe una fórmula de combinaciones o de permutaciones. Usualmente, hay que dividir el problema en pedazos pequeños, y en cada uno de estos usar las técnicas antes mencionadas. Hay que aprender cuándo se tiene que dividir un problema en una suma o en una multiplicación. Veremos algunos ejemplos en donde podemos aplicar el principio de Divide y Conquista.

Ejemplo 12 *En una pizzería hay* 10 *ingredientes. Las pizzas pequeñas llevan* 3 *ingredientes distintos. Las pizzas medianas llevan* 5 *ingredientes distintos. Las pizzas grandes llevan* 7 *ingredientes distintos. ¿De cuántas formas se pueden pedir* 2 *pizzas?*

Como está escrito el problema, tenemos que hacer algunas suposiciones. Por ejemplo, vamos a suponer que si ordenamos una pizza A y luego una B es lo mismo que ordenar una B y luego una A. También supondremos que no importa en qué orden se pongan los ingredientes de una pizza, sino simplemente cuáles son. Para resolver este problema, una buena meta intermedia es encontrar cuántos tipos distintos de pizzas existen. Esto lo contamos como sigue.
Si la pizza es pequeña, hay que elegir 3 de 10 ingredientes, y esto lo podemos hacer de $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$ formas distintas. Si la pizza es mediana, hay que elegir 5 de 10 ingredientes, y esto lo podemos hacer de $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$ formas distintas. De manera análoga encontramos que hay $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = 120$ formas de hacer una pizza grande. Como dividimos en casos, aquí hay que aplicar la regla de la suma para obtener un total de $120 + 252 + 120 = 492$ tipos de pizza distintos.
Ahora tenemos que ocuparnos de la forma de hacer las órdenes. Podríamos intentar contarlas con asignaciones, pero entonces estaríamos cometiendo el error de darle un orden a las pizzas. Podríamos intentar contarlas sólo con combinaciones, pero las combinaciones no cuentan cuando se repite un mismo tipo de pizza. Sin embargo, sí sabemos qué hacer en cada uno de estos casos, de modo que nos conviene dividir las ordenes según repitan pizza o no.
Si nuestra orden tiene dos pizzas iguales, entonces hay que elegir únicamente qué tipo de pizza es, lo cual podemos hacer de 492 formas. Si nuestra orden tiene dos pizzas distintas, entonces hay que elegir de entre los 492 tipos, 2 de ellos. Esto lo podemos hacer de $\binom{492}{2} = \frac{492 \cdot 491}{2} = 120786$ formas. Finalmente, como dividimos en casos, tenemos que aplicar la regla de la suma y obtenemos $120786 + 492 = 121278$ ordenes distintas de dos pizzas.

Ejemplo 13 *Gogo tiene* 4 *amigas. Para el día de San Valentín compró* 3 *peluches iguales y* 2 *rosas iguales, ¿de cuántas formas puede obsequiar todos sus regalos si los puede obsequiar como quiera?*

Una vez más, nos enfrentamos a un problema que no se puede resolver directamente con una cuenta de permutaciones o combinaciones aislada. En el problema anterior lo último que hicimos fue aplicar la regla de la suma. En este problema usaremos al final la regla del producto dividiendo el problema en los siguientes dos problemas más

sencillos: ¿de cuántas formas puede repartir los peluches? ¿de cuántas formas puede repartir las rosas?
Resolvamos la primer pregunta. Como Gogo puede repartir los peluches como quiera, tiene varias opciones según cuántos peluches regale a una misma persona. Dividiremos por casos de la siguiente manera.

- Gogo le da los 3 peluches a la misma chica. Esto lo puede hacer de 4 formas, únicamente decidiendo a quién se los va a dar.

- Gogo le da 2 peluches a una y 1 a otra. De las 4 tiene que elegir a una para regalarle los 2 y de las *otras* 3 tiene que elegir a otra para darle el que queda. Esto se puede hacer de $4 \cdot 3 = 12$ formas.

- Gogo le da máximo un peluche a cada una. Tiene que *elegir* a 3 de ellas, lo cual lo puede hacer de $\binom{4}{3} = 4$ formas.

Juntando los casos, vemos que Gogo puede regalar los peluches de $4 + 12 + 4 = 20$ formas. Con las rosas pasa algo similar. Si regala ambas a una sola persona, lo puede hacer de 4 formas. Si regala una y una, lo puede hacer de $\binom{4}{2} = 6$ formas. Así, tiene $4 + 6 = 10$ formas distintas de regalar las rosas.
Como cada forma de regalar los peluches es compatible con cada forma de regalar las rosas, hay que aplicar la regla del producto para encontrar el total de posibilidades. Así, Gogo tiene $20 \cdot 10 = 200$ formas de darle los regalos a sus amigas en San Valentín.

Ejemplo 14 *¿Cuántas manos de dominó tienen al menos 5 mulas?*

Para este problema tenemos que recordar que el juego de dominó consta de fichas con todas las posibles parejas de números entre 0 y 6. Una mano de dominó consta de 7 fichas (sin importar su orden) y una ficha es una mula si ambos números en ella son iguales. Dos fichas se pueden juntar por dos extremos iguales.
Como una mula queda totalmente determinada por un número de 0 a 6, entonces hay 7 mulas. Las otras fichas no son mulas y están determinadas por 2 de los 7 números, de modo que hay $\binom{7}{2} = 21$ de éstas. Como pasan cosas distintas con las fichas que son mulas y con las que no, resolveremos el problema contando cuántas mulas tiene la mano.

- Si la mano tiene 5 mulas, hay que elegir 5 de 7 números para que sean las mulas. Esto lo podemos hacer de $\binom{7}{5}$ formas. Además, para cada elección de mulas, entre las otras 21 fichas hay que elegir 2 para completar la mano, lo cual podemos hacer de $\binom{21}{2}$ formas. Esto nos da un total de $\binom{7}{5}\binom{21}{2}$ posibilidades en este caso.

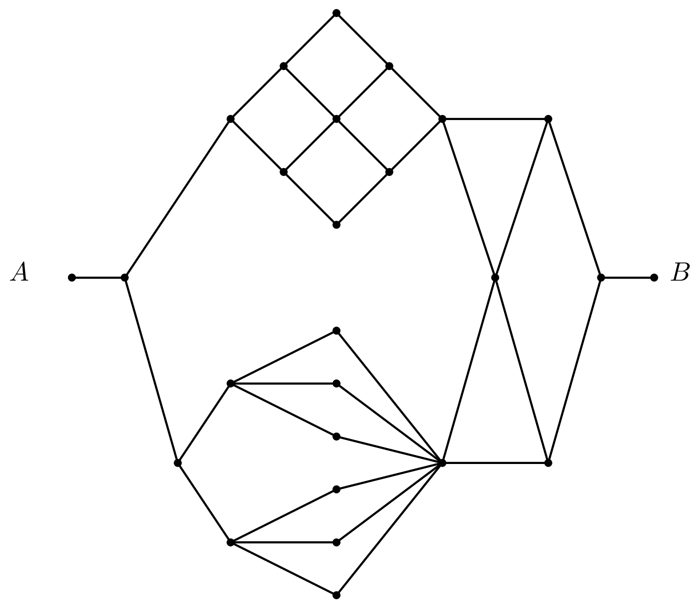
- Para una mano con 6 mulas hay que elegir 6 de 7 números que correspondan a las mulas y luego entre las 21 fichas restantes elegir una para completar la mano. Así, en este caso hay $\binom{7}{6} \cdot 21$ manos posibles.

- Sólo hay una mano que tenga las 7 mulas.

Sumando las posibilidades de todos los casos, vemos que en total tenemos $\binom{7}{5}\binom{21}{2} + \binom{7}{6} \cdot 21 + 1 = 4410 + 147 + 1 = 4558$ manos de dominó con al menos 5 mulas.

Problemas

23. ¿Cuántas formas hay de llegar de A a B en la siguiente figura si únicamente se permite avanzar a la derecha?



24. En un grupo de 15 personas se eligirá un tesorero, un presidente y un organizador de logística. Si no necesariamente son personas distintas, ¿de cuántas formas podemos elegirlos?

25. ¿De cuántas formas se pueden colocar 4 pelotas negras indistinguibles y 4 pelotas blancas indistinguibles alrededor de una mesa? (Dos configuraciones se consideran iguales si una de ellas se puede obtener a partir de la otra rotando la mesa).

26. Se marca una tarjeta con un 1, dos tarjetas con un 2, y así sucesivamente hasta que se marcan cincuenta tarjetas con un 50. Se revuelven las tarjetas. ¿Cuántas tarjetas deben sacarse como mínimo para asegurar que entre las que se sacan hay al menos 10 con el mismo número?

27. Para organizar un torneo de futbol se necesitan elegir tres meses distintos del año, con la condición de que no tengan 31 días. En el primer mes habrá 10 días distintos en los cuales se juegue un partido. En el segundo mes habrá 5 días distintos en los cuales se juegue un partido. En el último mes habrá 3 días

distintos en los cuales se juegue un partido. ¿De cuántas formas es posible hacer el calendario de juegos? Recuerda que hay años bisiestos.

28. Pichi escribe todos los números mayores a 10000 que se pueden formar con dígitos a, b, c, d y e (no necesariamente en ese orden) que cumplen la condición de que $b = a + 2$, $c = b + 2$, $d = c + 2$ y $e = d + 2$.

    - ¿Cuántos números escribió Pichi?
    - Calcula la suma de los números que escribió Pichi.

Conclusiones

Existen varias técnicas básicas de conteo. Las podemos resumir en la siguiente lista:

- Podemos contar objetos enlistándolos con un orden.
- Si dividimos un problema en casos y sabemos de cuántas formas se puede hacer cada caso, al final hay que sumar los resultados.
- Si tenemos que hacer múltiples decisiones compatibles que sabemos de cuántas formas se pueden hacer, entonces hay que multiplicar las posibilidades.
- Podemos elegir el tipo de n objetos entre m tipos de m^n formas distintas.
- Podemos acomodar n objetos distintos en una fila de $n!$ formas.
- Podemos elegir k de n objetos en $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ formas.
- Para resolver un problema grande, podemos aplicar el principio de Divide y Conquista para resolver problemas más pequeños y luego combinar los resultados adecuadamente.

Para poder aprovechar al máximo estas técnicas es necesario que las practiques. Después de resolver varios problemas se empieza a desarrollar un instinto para saber contar. Quien sabe, a lo mejor un día de estos podrías contar las abejas de un enjambre de golpe.