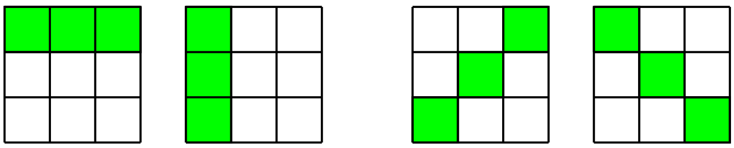
Cuadrados Mágicos

Por Radmila Bulajich Manfrino

Nivel Básico

Un cuadrado mágico es una arreglo de N^2 casillas, donde N representa un entero positivo mayor o igual a 3, en el cual en cada una de las casillas encontramos un número entero distinto. La palabra mágico se refiere a que las sumas de los números en cada renglón, columna y diagonales (como se muestra en la figura), son las mismas.



Renglón   Columna   Diagonales

Aún cuando los números de un cuadrado mágico no son necesariamente números consecutivos, en este artículo únicamente trabajaremos con aquellos que tienen números consecutivos.

Si los números que acomodamos en el cuadrado mágico son los enteros positivos $1, 2 \ldots, N^2$, decimos que el cuadrado es de orden N, y su número mágico es igual a la suma de los números de cualquier renglón, columna o diagonal, es decir, es igual a

$$\frac{N(N^2+1)}{2}.$$

Este número lo podemos calcular fácilmente considerando la suma de todos los números y dividiéndolo entre el número de renglones o columnas, es decir,

$$\frac{1+2+\cdots+N^2}{N} = \frac{\frac{N^2(N^2+1)}{2}}{N} = \frac{N(N^2+1)}{2}.$$

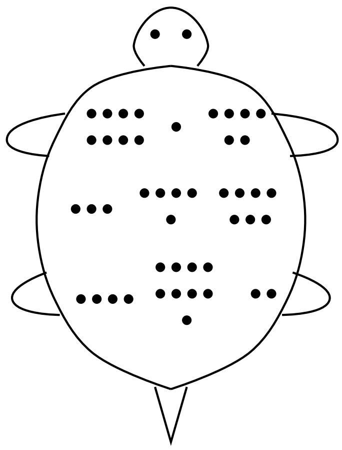
Por ejemplo, en el cuadrado de 3×3, el número mágico es $\frac{1+2+\cdots+9}{3} = \frac{3(9+1)}{2} = 15$.

Cuadrados mágicos de 3×3 tenemos solamente uno, si no contamos las rotaciones y reflexiones. Cuando N crece el número de cuadrados mágicos se incrementa rápidamente. En la siguiente tabla escribimos el número de cuadrados mágicos que se pueden construir dependiendo de N.

N	No. cuadrados mágicos distintos
3	1
4	808
5	$68,826,306$

En el año de 1693, los 808 cuadrados mágicos de 4×4 fueron publicados por el francés Bernard Frénicle de Bessy. En su estudio nunca utilizó métodos matemáticos propiamente dichos para crearlos sino que escribió la lista utilizando el "método de exhausión". No fue hasta 1973 que, gracias al desarrollo de las computadoras, Richard Shroeppel, matemático y programador, calculó que había $275,305,224$ cuadrados mágicos de 5×5. El número que aparece en la tabla difiere de éste ya que se eliminaron los cuadrados mágicos que son "iguales" por rotación o reflexión. No se tiene, siquiera, un número aproximado de cuántos cuadrados mágicos de 6×6 hay.

La historia de los cuadrados mágicos es muy antigua. Algunos de los cuadrados mágicos de 3×3 los podemos encontrar grabados en piedra o metal y fueron encontrados en India y China, alrededor del siglo III a.n.e. En un manuscrito, que data de 2200 a.n.e. en tiempos del Emperador Yu en China, hay una leyenda que dice que un día el Emperador paseando por el río encontró una tortuga nadando en el río y en su caparazón tenía una serie de puntos distribuidos de la siguiente manera



es decir, representando los puntos en el cuadrado mágico tenemos

8	1	6
3	5	7
4	9	2

La tortuga fue llevada al palacio y se convirtió en la tortuga más famosa de aquellos tiempos. Incluso esta historia fue conocida en Europa y muchas personas famosas la visitaron, matemáticos, reyes, filósofos etc.
No fue hasta el primer milenio de nuestra era que los cuadrados mágicos de 4×4 empiezan a ser conocidos por la sociedad en general. El primer registro que se tiene de cuadrado mágico de 4×4 es el que aparece en una inscripción, en el friso de una puerta, en Khajuraho, India y data del año 1100 d.n.e. Este cuadrado mágico además de cumplir que todos los renglones, columnas y diagonales suman lo mismo también sus diagonales cortadas suman lo mismo.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Estos cuadrados mágicos se conocen también con el nombre de diabólicos. Este cuadrado mágico tiene también otros patrones, por ejemplo, si sumamos los primeros dos renglones y los últimos dos renglones, o las primeras dos columnas y las últimas dos columnas obtenemos

9	25	9	25
25	9	25	9

19	15
15	19
19	15
15	19

Cornelius Agrippa (1486-1535) físico, astrólogo y teólogo, relacionó los cuadrados mágicos de 4×4 con Júpiter y se creía que estos cuadrados combatían la melancolía, probablemente esta es la razón por la cual Durero lo integró a su grabado.

Cuadrado mágico de Alberto Durero

Alberto Durero (1471-1528) de padres húngaros, nació en Nuremberg, Alemania, en una familia de dieciocho hermanos, y estaba destinado a seguir los pasos de su padre en el negocio de la joyería. A los trece años, en contra de la voluntad de su padre, decidió dedicarse a la pintura y poco después se convirtió en aprendiz de pintor. En 1490, Durero se dedicó a viajar y a desarrollar la idea de un arte basado en las matemáticas.

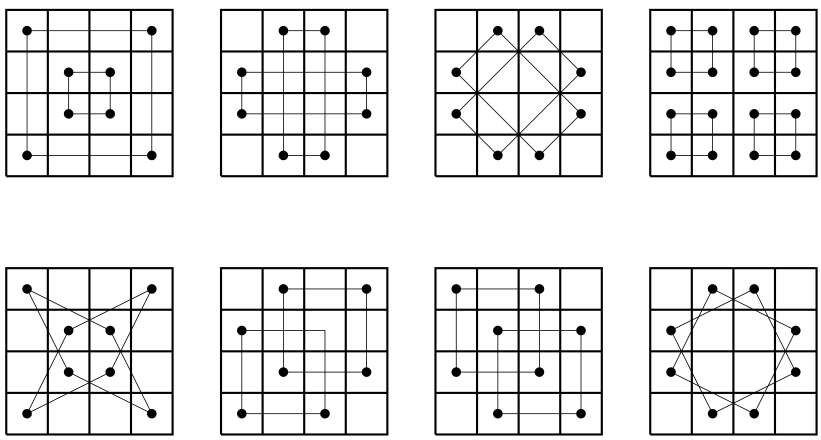
De regreso, en Nuremberg, estudió obras de matemáticos y artistas: Euclides, Vitruvio, Pacioli, Alberti entre otros. Alberto Durero es considerado por mucho el mejor de los artistas alemanes del Renacimiento, además, en 1523, finalizó su "Tratado de las proporciones", pero el contenido matemático era demasiado elevado para los lectores, lo que le llevó a editar (1525) una obra más accesible, "Tratado sobre el medir". Aparte de las primeras obras sobre aritmética comercial, éste fue el primer libro de matemáticas impreso en Alemania, por lo que Durero se convirtió en uno de los matemáticos más importantes del Renacimiento. La obra se centra en la geometría plana y en la descripción de objetos sólidos.

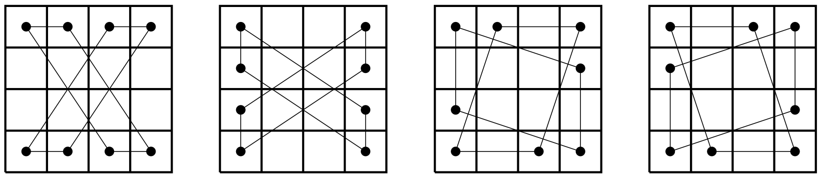
Ya siendo una persona con un gran reconocimiento, hizo su enigmático grabado "Melancolía I" (1514). En la parte superior derecha encontramos uno de los cuadrados mágicos de 4×4 más sorprendentes. Los dos números centrales en el último renglón son 15 y 14, si los juntamos 1514 nos indican el año en que Durero terminó su obra.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Los renglones, columnas y diagonales suman 34, además 34 es la suma de los números que están en las esquinas $(16 + 13 + 4 + 1)$ y del cuadrado central $(10 + 11 + 6 + 7)$. La suma de los números restantes es: $68 = 2 \times 34 = 12 + 8 + 3 + 2 + 5 + 9 + 15 + 14$.

Si dibujamos sobre el cuadrado mágico de Durero los siguientes cuadriláteros y sumamos los números que aparecen en los vértices de los mismos, marcados por puntos, podemos comprobar que todas las sumas son iguales a 34.





Otras características interesantes del cuadrado mágico de Durero que conviene resaltar son, por ejemplo: la suma de los cuadrados de los enteros en el primer y segundo renglón es igual a la suma de los cuadrados de los enteros en el tercer y cuarto renglón, es decir,

$$256+9+4+169+25+100+121+64 = 81+36+49+144+16+225+196+1 = 748.$$

Este número, 748, también es igual a

- la suma de los cuadrados de los enteros en el primer y tercer renglón,
- la suma de los cuadrados de los enteros en el segundo y cuarto renglón,
- la suma de los cuadrados de los enteros en las dos diagonales.

Todo esto también es cierto si intercambiamos los renglones por columnas.

Ahora bien, en este cuadrado también se observa otra bella simetría que consiste en sumar los números que aparecen en los primeros dos renglones y escribirlos en en el primer renglón y, sumar los números de los dos últimos renglones y colocarlos en el siguiente renglón, lo mismo hacemos con las columnas, y obtenemos

21	13	13	21
13	21	21	13

19	15
15	19
15	19
19	15

Existen otras simetrías en este cuadrado que no describiremos aquí, pero es interesante estudiarlas. Lo que varios historiadores se han preguntado es si Durero se dio cuenta de toda la belleza que había generado en su cuadrado.

¿Cómo construir cuadrados mágicos?

A lo largo de la historia se han elaborado varios métodos para construir cuadrados mágicos. Para utilizar estos métodos es importante ver los distintos tipos de cuadrados mágicos que podemos hacer:

- Cuadrados mágicos de orden impar, son los cuadrados mágicos donde N es un número impar, es decir, de la forma $2m+1$, con m un entero positivo.

- Cuadrados mágicos de orden par, que llamamos par sencillo, donde N es de la forma $2(2m+1)$, con m un entero mayor o igual a 0, es decir, el doble de un número impar. Observemos que los números que generamos aquí son los números pares que son divisibles entre 2 pero no entre 4.

- Cuadrados mágicos cuyo orden es doblemente par, que llamamos doble par, donde N es de la forma $2(2m)$, para m un entero, es decir, el doble de un número par. El número de cuadraditos en cada uno de los lados de los cuadrados se puede dividir entre 2 y 4.

Los métodos para construir cuadrados mágicos varían en complejidad. Los cuadrados mágicos más difíciles de construir son los de orden par sencillo. Empecemos construyendo cuadrados mágicos de orden impar. El método que se describe a continuación no funciona para construir los cuadrados mágicos de orden doblemente par o par sencillo.

Método de Loubère

En 1693, Simon de la Loubère sugirió un método para crear cuadrados de orden impar. Veamos por ejemplo una cuadrado mágico de orden 5.

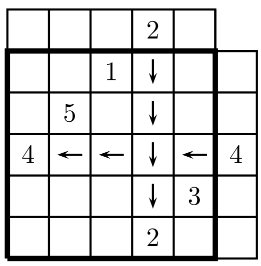
- Empezamos con el 1 en el cuadradito central superior.

- Colocamos números consecutivos en forma diagonal, avanzando hacia arriba y hacia la derecha, pero apenas alcanzamos el borde superior, escribimos el número en esa misma columna hasta abajo y continuamos llenando en diagonal.

- Cuando alcanzamos el borde derecho, los números se escriben en el mismo renglón pero en la parte izquierda.

- Cuando llegamos a un cuadradito que está ocupado, el número que corresponde se escribe debajo del último número que habíamos escrito.

- Por último cuando llegamos a la esquina superior derecha, hacemos lo mismo que en el paso anterior.



	18	25	2	9	
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

Si rotamos el cuadrado o lo reflejamos respecto a una recta que lo divida en dos por su parte central, podemos generar 7 cuadrados mágicos más. Si el 1 lo colocamos en cualquier otro cuadradito se generan cuadrados que suman lo mismo en los renglones y columnas pero no en la diagonal.

Ahora describimos algunos métodos que se utilizan para llenar cuadrados de orden par sencillo o doblemente par, los cuales fueron desarrollados por Philippe La Hire y Alberto Durero.

Método de Philippe La Hire

El matemático francés Philippe La Hire (1640-1719) creó el método para llenar cuadrados mágicos de orden par sencillo. Él hace uso de dos cuadrados, que llamaremos A y B, y al sumar el número de cada uno de los cuadraditos respectivos obtenemos el cuadrado mágico.

Veamos cómo construir un cuadrado mágico de orden 6. En el cuadrado A llenamos la diagonal con los números del 1 al $N = 6$ empezando para una diagonal en el cuadradito superior derecho y para la otra en el cuadradito inferior derecho, es decir, empezamos a llenar las diagonales iniciando en el lado derecho del cuadrado. Todos los cuadraditos que quedan vacíos en la primera columna se llenan con el 6 o su "complemento" el número 1, como queramos. Aquí, la palabra complemento de un número se refiere al número $N - x + 1$, así por ejemplo, el complemento del 6 es $6 - 6 + 1 = 1$, el complemento del 5 es el $6 - 5 + 1 = 2$. Lo que tenemos que cuidar es que siempre haya la misma cantidad de dígitos 1 y de dígitos 6.

Ya que llenamos la primera columna, llenamos la sexta con el complemento de lo que tenemos en la primera. Para completar la segunda y quinta columnas colocamos números 5 o su complemento (el 2) respetando la misma regla, y así sucesivamente.

Llenamos el cuadrado B de forma análoga solamente que ahora los enteros que colocamos son $0, N, 2N, 3N, \ldots, (N-1)N$. Primero llenamos las dos diagonales con estos números pero ahora iniciando en los extremos superior izquierdo y derecho, es decir, llenamos las diagonales iniciando en el lado superior del cuadrado. En los cuadraditos que quedan, acomodamos estos números utilizando las mismas reglas que para el cuadrado A, pero ahora iniciamos con el renglón superior e inferior. Luego, el segundo renglón y el penúltimo, y así sucesivamente. Observemos, que aquí los números que colocamos son de la forma $x = (N-1)N - j \cdot N$, donde $j = 1, 2, \ldots, (N-1)$.

Finalmente sumamos los cuadrados A y B para obtener el cuadrado mágico C. Observemos que aquí el número mágico es $\frac{1+2+\cdots+36}{6} = \frac{6(36+1)}{2} = 111$.

6	2	3	4	5	1
1	5	3	4	2	6
1	2	4	3	5	6
6	2	4	3	5	1
1	5	4	3	2	6
6	5	3	4	2	1

A

0	30	0	30	30	0
6	6	24	24	6	24
18	12	12	12	18	18
12	18	18	18	12	12
24	24	6	6	24	6
30	0	30	0	0	30

B

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

C

El método de La Hire se puede utilizar para construir cuadrados que sean doblemente pares, veamos un ejemplo de un cuadrado mágico de 4×4.

4	2	3	1
1	3	2	4
1	3	2	4
4	2	3	1

A

0	12	12	0
8	4	4	8
4	8	8	4
12	0	0	12

B

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

C

Algunos autores han utilizado variaciones de este método para llenar cuadrados de cualquier orden, pero para llenar cuadrados de orden impar se tiene que cambiar la forma de llenar los cuadrados A y B, ya que este método no funciona.

Método de Alberto Durero

El cuadrado mágico de Alberto Durero se puede llenar utilizando el método que acabamos de describir, sin embargo no fue el que usó el autor. Alberto Durero creó su propio método para construir cuadrados mágicos doblemente pares.

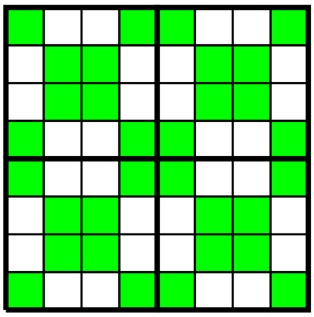
Veamos como construir el cuadrado 4×4, una variación de esta forma de llenar cuadrados funciona para cualquier cuadrado doblemente par. Colocamos el número 1 en el cuadradito inferior izquierdo. Ahora, imaginamos que vamos colocando los números consecutivos en el renglón inferior pero únicamente escribimos los números que ocupan un cuadradito de la diagonal, así en el renglón inferior tendremos únicamente el 1 y el 4. Continuamos al siguiente renglón de abajo hacia arriba, y podemos iniciar en el lado izquierdo o derecho del cuadrado como queramos, sin embargo tenemos que seguir la misma regla que escojamos para colocar el resto de los números. El primer número debería ser un 5 (que no escribimos) y el siguiente (que pertenece a la diagonal) es el 6, y así sucesivamente, hasta que lleguemos al renglón superior. El último cuadradito que llenamos tiene el número 16 en la esquina superior derecha.

Para terminar de construir el cuadrado mágico haremos lo mismo pero ahora iniciando, en el último cuadradito que llenamos, en este caso la esquina superior derecha con el número 1 (que no escribimos) y escribiendo únicamente los números que no pertenecen a la diagonal. Así colocamos el 2, junto al 16, el 5 junto al 11 y así sucesivamente, como se muestra en la figura.

13			16
	10	11	
	6	7	
1			4

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

Una variación de este método se puede utilizar para llenar todos los cuadrados doblemente pares. Sin embargo, el método no se aplica directamente, sino que hay que dividir el cuadrado en subcuadrados de 4×4 cuadraditos y marcar la diagonal de cada uno de estos subcuadrados, como se muestra en la figura.



Una vez hecho esto, se empiezan a distribuir los números igual que antes pero se escriben todos aquellos números que pertenezcan a alguna de las diagonales de un subcuadrado de 4×4 (los cuadraditos coloreados). Una vez que llegamos a una de las esquinas del cuadrado, iniciamos el proceso en sentido inverso, en ese mismo cuadradito, pero ahora llenando todos los cuadraditos que no pertenecen a ninguna de las diagonales de los subcuadrados de 4×4 cuadraditos. ¡Inténtalo en el cuadrado de 8×8!, el número mágico es

$$\frac{1 + 2 + \cdots + 64}{8} = \frac{\frac{64 \cdot 65}{2}}{8} = 260.$$

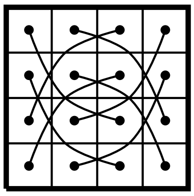
Como ya vimos existen cuadrados mágicos que son diabólicos pero también tenemos otra clasificación interesante que son los cuadrados Nasik, que además de diabólicos son “perfectos”.

Cuadrados mágicos de Nasik

Los cuadrados mágicos de Nasik reciben su nombre de una región situado al oeste de la India a las orillas del río Godavari. Estos cuadrados mágicos se conocen también con el nombre de diabólicos y perfectos.

1	14	7	12
15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13

Los números que están unidos por las curvas suman la mitad de la suma mágica



Estos cuadrados como ya dijimos son diabólicos, es decir, que las diagonales cortadas suman lo mismo, por ejemplo la suma de $14 + 15 + 2 + 3 = 10 + 4 + 7 + 13 = 11 + 16 + 6 + 1 = 34$, pero por lo que estos cuadrados se llaman perfectos es que si repetimos el cuadrado en todas las direcciones, entonces cualquier cuadrado de 4×4 que escojamos, será mágico. Por ejemplo, el cuadrado sombreado es mágico.

1	14	7	12	1	14	7	12
15	4	9	6	15	4	9	6
10	5	16	3	10	5	16	3
8	11	2	13	8	11	2	13
1	14	7	12	1	14	7	12
15	4	9	6	15	4	9	6
10	5	16	3	10	5	16	3
8	11	2	13	8	11	2	13

Un cuadrado mágico de Nasik sigue siendo de Nasik bajo cualquier rotación, reflexión o si movemos el renglón superior y lo ponemos en el inferior o la columna izquierda y la ponemos a la derecha.

También podemos ver que en este arreglo infinito de Nasik cualquier cuadrado de 2×2 que escojamos suma 34 y a lo largo de cualquier diagonal cualesquiera dos números que sumemos que estén separados por una casilla suman 17.

Los cuadrados de Nasik se pueden construir de cualquier orden impar mayor a 3 y también para los cuadrados que llamamos doble pares, es decir, los múltiplos de 4. No se ha podido construir un cuadrado de Nasik de orden par sencillo, pero tampoco se ha

podido demostrar que no existe.
Hay 48 diferentes cuadrados de Nasik de orden 4. Hay 3600 cuadrados de Nasik de orden 5 si excluimos rotaciones y reflexiones. Si además excluimos las permutaciones cíclicas hay únicamente 144.
Ian Stewart, profesor de matemáticas de la Universidad de Warwick dijo: "Es sorprendente lo que los métodos modernos pueden lograr en áreas tan tradicionales (refiriéndose a los cuadrados mágicos). ... si pensábamos que esta área de los cuadrados mágicos estaba acabada hace mucho tiempo, lo tenemos que volver a pensar."

Ejercicios

1. Existen otros métodos para crear cuadrados mágicos. Haz el tuyo.

2. Modifica el método de Philippe La Hire para construir cuadrados mágicos de orden impar.

3. Construye un cuadrado mágico de 3×3 con los números: $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, 1, $\frac{7}{6}$, $\frac{4}{3}$ y $\frac{3}{2}$.

4. En el cuadrado mágico que se muestra, cinco de los números se han representado con las letras v, w, x, y, z. Determina el valor de $y + z$.

v	24	w
18	x	y
25	z	21

5. Pablo está tratando de llenar el siguiente cuadrado mágico con los números del 1 al 16 como se muestra.

2	3		
4			

¿Es posible que Pablo termine de llenar el cuadrado mágico?

Bibliografía

1. Pickover C.A., *The Zen of Magic Squares, Circles and Stars,* Princeton University Press, 2003.

2. Ouaknin M.A., *The Mystery of Numbers,* Assouline Publishing, 2004.

3. Gardner M. editado por Richards D., *The Colossal Book of Short Puzzles and Problems,* W.W. Norton And Company, Inc., 2006.