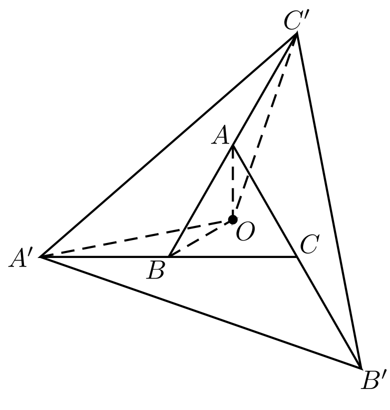
Circuncírculos

Por Eduardo Velasco Barreras

Nivel Avanzado

Entre los primeros puntos importantes de los triángulos que estudiamos en la olimpiada está el *circuncentro*. Éste es el punto de concurrencia de las *mediatrices* que tiene la propiedad de que es el único punto que se encuentra a la misma distancia de los vértices del triángulo, en otras palabras, podemos trazar un círculo con centro en el circuncentro que pasa por todos los vértices del triángulo. Recordemos que la mediatriz de un segmento AB es la recta perpendicular a AB que pasa por su punto medio. Empecemos con un ejemplo.

Ejemplo 1. Sea ABC un triángulo equilátero. Sean: A' el punto en la recta BC (distinto de C) tal que $BC = BA'$, B' el punto en la recta CA (distinto de A) tal que $CA = CB'$ y C' el punto en la recta AB (distinto de B) tal que $AB = AC'$. Pruebe que los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen el mismo circuncentro.



Solución. Sea O el circuncentro de ABC. Demostraremos que O es también el circuncentro de $A'B'C'$, probando que $OA' = OB' = OC'$, y de esta manera quedará demostrado que los triángulos tienen el mismo circuncentro.

Como O es circuncentro de ABC se tiene que $OA = OB$. Además, por ser ABC equilátero,

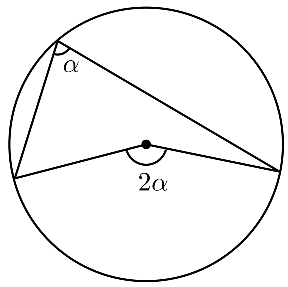
$$\angle OBA' = 180^\circ - \angle OBC = 180^\circ - 30^\circ = 180^\circ - \angle OAB = \angle OAC'.$$

Finalmente, por construcción, y por ser ABC un triángulo equilátero, se tiene que $BA' = BC = BA = AC'$.

De las tres igualdades anteriores, $OA = OB, \angle OBA' = \angle OAC', BA' = AC'$, se concluye que los tringulos OBA' y OAC' son congruentes y entonces $OA' = OC'$. De manera análoga podemos demostrar que los triángulos OAC' y OCB' son congruentes, de lo cual se concluye que $OC' = OB'$, de donde se sigue que $OA' = OB' = OC'$ y O es circuncentro de $A'B'C'$.

Una propiedad muy utilizada en la olimpiada es la relación entre ángulos inscritos en una circunferencia. Como utilizaremos más adelante este resultado, vamos a enunciarlo:

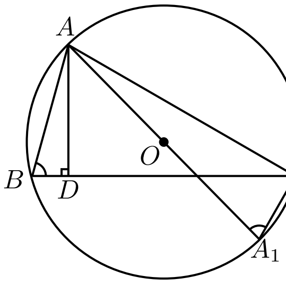
Teorema del Ángulo Inscrito *La medida del ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo central.*



En la figura se ilustra este teorema: El ángulo inscrito mide α y el ángulo central mide 2α.

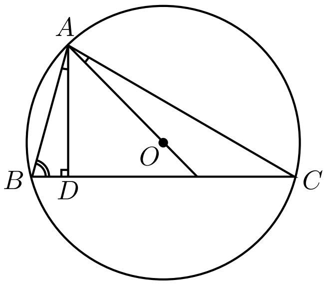
Una relación importante que existe entre el circuncentro y las alturas de un triángulo es la siguiente:

Propiedad 1. Sea ABC un triángulo cuyo circuncentro es O y sea AD la altura desde A. Entonces $\angle BAD = \angle CAO$.



Solución. Consideremos el circuncírculo del triángulo ABC y prolonguemos la recta AO hasta que corte al circuncírculo en un punto A_1. Como AA_1 pasa por el centro O entonces es un diámetro de la circunferencia de donde se sigue que el ángulo $\angle ACA_1 = 90°$ (por el Teorema del ángulo inscrito). Como los ángulos $\angle AA_1C$ y $\angle ABC$ abren el arco $\widehat{AC}$ del circuncírculo, entonces $\angle ABD = \angle AA_1C$. Por otro lado, $\angle BDA = 90° = \angle A_1CA$. Estas dos últimas igualdades implican que los triángulos BDA y A_1CA son semejantes, de donde se concluye que $\angle BAD = \angle CAO$.

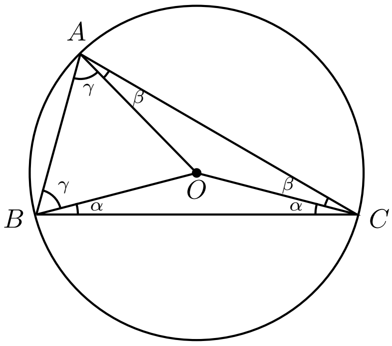
Propiedad 2. Sea ABC un triángulo con circuncentro O. Entonces $\angle CBA+\angle CAO = 90°$.



Solución. Como AD es altura, tenemos que $\angle DBA + \angle BAD = 90°$. Sin embargo, $\angle DBA = \angle CBA$ y por la Propiedad 1 $\angle BAD = \angle CAO$. Sustituyendo las igualdades en la suma, obtenemos el resultado.

Esta propiedad está enunciada aquí para los ángulos $\angle CBA$ y $\angle CAO$. Sin embargo, se puede demostrar de la misma manera que

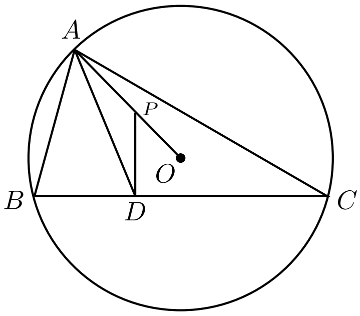
$$\begin{aligned}
\angle ABC + \angle ACO &= 90° \\
\angle ACB + \angle ABO &= 90° \\
\angle BCA + \angle BAO &= 90° \\
\angle CAB + \angle CBO &= 90° \\
\angle BAC + \angle BCO &= 90°.
\end{aligned}$$



$$\alpha + \beta + \gamma = 90°$$

Cuando tenemos problemas en los que se involucra al circuncentro, casi siempre resulta útil trazar el circuncírculo del triángulo y trazar alguno de los diámetros. Sin embargo, también se pueden utilizar propiedades como las que acabamos de demostrar para resolver problemas. Para ilustrar las propiedades, resolvamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. Sea ABC un triángulo de circuncentro O y sea AD la bisectriz de $\angle BAC$ con D sobre BC. La perpendicular a BC por D corta a AO en P. Demuestre que $PA = PD$.



Solución. Demostraremos que $\angle PDA = \angle PAD$, lo que implica que el triángulo ADP es isósceles con $PA = PD$. Tenemos que $\angle PDA = 90° - \angle ADB$, por ser PD perpendicular a BC. También se tiene que $\angle ADB = \angle DAC + \angle ACD$, por ser $\angle ADB$ exterior en el triángulo DAC. Entonces

$$\angle PDA = 90° - \angle DAC - \angle ACD.$$

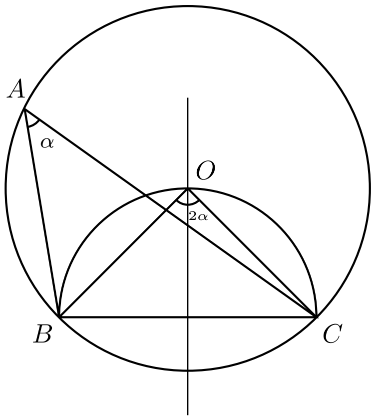
Por otro lado, tenemos que $\angle PAD = \angle PAB - \angle DAB = \angle PAB - \angle DAC$ ya que AD es bisectriz. Queremos demostrar que $\angle PDA = \angle PAD$, lo cual es cierto ya que utilizando la Propiedad 2 tenemos que

$$\begin{aligned}
\angle PAB &= \angle OAB \\
&= 90° - \angle ACB \\
&= 90° - \angle ACD,
\end{aligned}$$

lo que finaliza la demostración.

Ahora, vamos a combinar algunos de los resultados ya demostrados para dar una caracterización del circuncentro:

Propiedad 3. Sea ABC un triángulo *tal que $\angle BAC$ es un ángulo águdo*. Si O es un punto del mismo lado de la recta BC que A tal que $\angle BOC = 2\angle BAC$, y $OB = OC$, entonces O es el circuncentro del triángulo ABC.



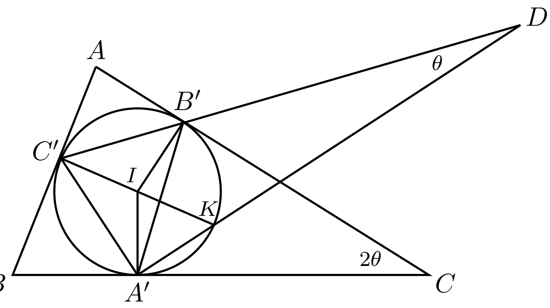
Solución. Notemos primero que el circuncentro cumple con ambas propiedades, es decir, si trazamos el circuncentro de ABC, por ser $\angle BAC$ un ángulo inscrito y $\angle BOC$ el ángulo central tendremos que $\angle BOC = 2\angle BAC$, además de que $OB = OC$ porque estas longitudes son radios.

Para ver que sólo el circuncentro cumple con esta propiedad, veamos lo siguiente: El hecho de que un punto O satisfaga que $OB = OC$ es equivalente a que O se encuentre en la mediatriz del segmento BC (y de hecho el circuncentro está en esa recta), y el hecho de que O satisfaga la relación de ángulos y que esté del mismo lado de BC que A significa que O pertenece al arco de circunferencia $\widehat{BC}$ que pasa también por el circuncentro.

El punto O, deberá estar por lo tanto en la intersección del arco con la mediatriz. Como la mediatriz y el arco se intersectan en un solo punto, dicho punto debe ser único, por lo que sólo el circuncentro cumple con esas condiciones.

Esta última propiedad es bastante útil para demostrar problemas que no son sencillos sin esta herramienta.

Ejemplo 3. Sea ABC un triángulo de incentro I. El incírculo del triángulo ABC toca a los lados BC, CA, AB en A', B', C', respectivamente. Sea K el punto diametralmente opuesto a C', y sea D la intersección de las lineas $B'C'$ y $A'K$. Pruebe que $CD = CB'$.



Solución. Como CB' y CA' son tangentes al incírculo desde C, entonces tienen la misma longitud[1]. Demostrar que $CD = CB'$ es equivalente entonces a demostrar que $CD = CB' = CA'$, lo cual nos dice que el problema es equivalente a demostrar que C es el circuncentro de $A'B'D$.

Observemos que C y D se encuentran del mismo lado de la recta $A'B'$. Para demostrar que C es el circuncentro de $A'B'D$ utilizaremos la Propiedad 3. Para poder aplicarla necesitamos verificar tres cosas:

$$\begin{aligned} \angle B'DA' &< 90^\circ \\ \angle B'CA' &= 2\angle B'DA' \\ CA' &= CB'. \end{aligned}$$

1. Como $C'K$ es diámetro del incírculo, entonces $\angle C'A'D = 90^\circ$, por lo que el triángulo $C'A'D$ es rectángulo en A' y el ángulo $\angle B'DA'$ es agudo.

2. Como B' es punto de tangencia del incírculo con el lado AC entonces $\angle IB'C = 90^\circ$. De la misma manera, $\angle IA'C = 90^\circ$. Como $\angle IB'C + \angle IA'C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, entonces el cuadrilátero $B'IA'C$ es cíclico[2] y $\angle A'IB' + \angle A'CB' = 180^\circ$. Esta última ecuación es equivalente a $\angle A'CB' = 180^\circ - 2\angle A'C'B'$, pues $A'CB'$ es inscrito y $A'IB'$ es el ángulo central correspondiente. Como $\angle A'C'B' + \angle A'DB' = 90^\circ$, se tiene que $\angle B'CA' = 2\angle B'DA'$.

3. $CA' = CB'$ ya lo habíamos demostrado.

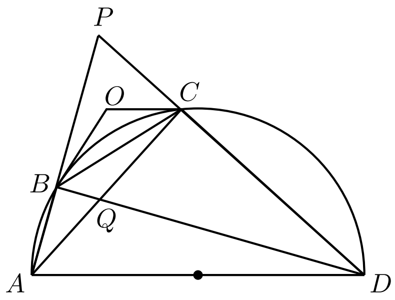
Como se cumplen las tres condiciones, C es circuncentro del triángulo $B'A'D$, y entonces $CD = CB'$, como queríamos.

Ejemplo 4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia tal que AD es diámetro, y sean P el punto de intersección de AB y CD, y Q el punto de intersección de AC y BD. Sea O el punto de intersección de las tangentes por B y C a la circunferencia. Demuestre que O, P, Q son colineales.

---

[1] Ver en el apéndice el teorema POTENCIAS.

[2] Ver en el apéndice la definición ... y el teorema ... CUADRILATERO CICLICO.



Solución. Para demostrar que estos puntos son colineales, demostraremos que

$$\angle APO = \angle APQ.$$

Primero notemos que $\angle ACD = \angle ABD = 90°$ ya que AD es diámetro. Sea $\alpha = \angle BAC$. Observemos que, como el triángulo APC es rectángulo en C, entonces

$$\angle BPC = 90° - \alpha.$$

Ahora, como OB y OC son tangentes a la circunferencia, entonces, por el Teorema del Ángulo Seminscrito [3], se tiene que $\angle OBC = \angle OCB = \angle BAC = \alpha$, por lo que $OB = OC$ y además

$$\angle BOC = 180° - 2\alpha.$$

Observemos que el triángulo BPC es acutángulo, que el punto O está en el interior de éste y satisface $OB = OC$ ya que OB y OC son tangentes. Además tenemos que $\angle BOC = 2\angle BPC$, por lo que concluimos por la Propiedad 3 que O es el circuncentro del triángulo BPC. Como O es circuncentro, aplicando la Propiedad 2 tenemos que $\angle BPO = 90° - \angle PCB$. Utilizando que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, $\angle PAD = 180° - \angle BCD = \angle PCB$. Entonces

$$\angle APO = \angle BPO = 90° - \angle PCB = 90° - \angle PAD.$$

Ahora, como $\angle ACD = \angle ABD = 90°$, tenemos que AC y DB son alturas del triángulo APD. Luego, Q es ortocentro de este triángulo y entonces PQ es altura también, de donde se sigue que

$$\angle APQ = 90° - \angle PAD.$$

Por lo tanto, $\angle APQ = \angle APO$, y entonces P, O, Q son colineales, como queríamos.

Ejercicios

1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que sus diagonales AC y BD son perpendiculares. Sea M el punto medio de AB y sea P el punto de intersección de las diagonales. Demuestra que MP es perpendicular a CD.

[3] Ver en el apéndice el teorema ANGULO SEMINSCRITO

2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y sea P el punto de intersección de las diagonales. Sea O el circuncentro de ABP y H el ortocentro de CDP. Demuestra que O, H, P son colineales.

3. Sea ABC un triángulo acutángulo. Sea AD la bisectriz del ángulo en A, con D sobre BC y sea O su circuncentro. La perpendicular a AO por D corta a AC en el punto B'. Demuestra que $AB' = AB$.

4. Sea ABC un triángulo y AD la altura sobre el lado BC. Tomando a D como centro y a AD como radio, se traza una circunferencia que corta a la recta AB en P y corta a la recta AC en Q. Demuestra que el triángulo AQP es semejante al triángulo ABC.

5. Sea ABC un triángulo de ortocentro H y sean O_A, O_B, O_C los circuncentros de los triángulos HBC, HCA, HAB, respectivamente. Demuestra que el triángulo $O_AO_BO_C$ es congruente al triángulo ABC y que su circuncentro es H.

6. Sea ABC un triángulo acutángulo de circuncentro O. Sea P un punto sobre el lado BC y sean Q el punto de intersección del circuncículo de OPB con AB ($Q \neq B$) y R el punto de intersección del circuncírculo de OPC con AC ($R \neq C$). Demuestra que el triángulo PQR es semejante al triángulo ABC y que el ortocentro de PQR es O.

7. Sea ABC un triángulo. Sean A' un punto en la recta BC tal que B esté entre A' y C y $A'B = AB$; B' un punto en CA tal que C esté entre B' y A y $B'C = BC$; C' un punto en AB tal que A esté entre C' y B y $AC' = AC$. Si los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen el mismo circuncentro, demuestra que ABC es equilátero.

Bibliografía

T. Andrescu, Z. Feng, *Mathematical Olympiads: Problems and Solutions from Around the World, 1999-2000*, The Mathematical Association of America.