Solución de problemas y temas iniciales para la olimpiada de matemáticas

Por Héctor Raymundo Flores Cantú

El objetivo de este escrito es proporcionar un primer acercamiento al tipo de conocimientos y razonamientos que son necesarios para los participantes en la olimpiada de matemáticas en México. Aunque hay excelente material publicado, tanto colecciones de problemas como textos con teoría, muchos profesores y participantes han manifestado su dificultad para extraer el material necesario para iniciar la preparación en la competencia. Por otra parte también espero que los temas y problemas que aquí son presentados sean de interés para cualquier otra persona interesada en la solución de problemas y en matemáticas. Así como que sirva para dar una visión distinta de lo que representa el verdadero quehacer dentro de la matemática. Me refiero a la solución de problemas.

Solución de problemas

(Matemática es la ciencia de resolver problemas)

La solución de problemas es considerada la más compleja de las funciones intelectuales y ha sido definida como un proceso que requiere el control y manejo de otras habilidades fundamentales como el análisis, la deducción, la creatividad y la memoria. El proceso ocurre cuando una persona (grupo, ente, ...) desea llegar a un objetivo, pero no sabe exactamente como proceder. Llamamos *solución del problema* justamente a la forma de llegar al objetivo deseado. Cuando la persona sabe como proceder para llegar al objetivo, la situación no es considerada como problema, sino como un ejercicio y lo que procede es “simplemente” seguir los pasos para llegar a este objetivo. Aunque los ejercicios forman parte fundamental en el proceso de aprendizaje de la matemática, no será éste el énfasis aquí.

Problema 1. Encuentra la suma de todos los números impares menores a $1,000,000$.

Obtener esa suma usando lápiz y papel no es una solución satisfactoria. Aún usando una calculadora el tiempo requerido para hacer todas las sumas hace que esta opción tampoco lo sea. Más adelante propondremos el problema de estimar el tiempo que ésto tardaría. Por otra parte muchas personas con conocimiento de computación podrían hacer un programa o usar una hoja de cálculo para obtener esa suma. Pero asumiendo que no admitimos el uso de una computadora, encontrar el valor de la suma del problema anterior, es un buen ejemplo de una situación que sería considerada como un problema para muchas personas. Sin embargo cualquier participante intermedio de la olimpiada de matemáticas daría la solución a este tipo de problema en unos segundos en media hoja de papel. Esto no porque sean "genios" sino porque la estrategia para este problema es uno de los primeros tópicos de la olimpiada y obtener la suma ya no es un problema, sino un ejercicio para ellos.

De esta forma, una situación puede representar un problema para algunos y no serlo para otros, dependiendo de la experiencia de cada uno. Podemos decir entonces que un problema se resuelve una sola vez, después se convierte en ejercicio, así como cualquier otra situación parecida. Una consecuencia importante de esto es que cada problema debe intentarse durante un tiempo suficiente antes de revisar la solución. Las personas que buscan la solución "al final del libro" antes de hacer un intento serio por resolver el problema, están desperdiciando una oportunidad valiosa de ejercitarse en sus habilidades que nunca podrán recuperar.

Los problemas, tal como los definimos, aparecen constantemente en todas las áreas del conocimiento y en cualquier sector, como la industria, los negocios, la economía, la política, la administración, así como en todas las ciencias naturales e ingenierías. Es prácticamente imposible encontrar algún área donde no haya problemas. En todas partes nos enfrentaremos en algún momento con querer llegar a algo, pero no saber cómo proceder.

Olimpiada de Matemáticas

Uno de los objetivos centrales de la olimpiada de matemáticas, es identificar y fomentar la capacidad de los participantes para resolver problemas. Ya sean problemas de matemáticas o problemas no matemáticos que requieren el uso de métodos matemáticos para obtener su solución. La olimpiada de matemáticas representa un marco excelente para ejercitar la habilidad para resolver problemas debido a que estos sólo requieren de conocimientos relativamente elementales en matemáticas. La mayoría se resuelve con lo que aparece en el programa de estudios de nivel secundaria. En particular, no requieren de trigonometría, cálculo ni geometría analítica. Pero la dificultad de los problemas no está en el conocimiento de los temas matemáticos sino en la habilidad del alumno para organizar, controlar y usar adecuadamente esos conocimientos para hallar la solución del problema. Los problemas iniciales de olimpiada están más relacionados con el tipo de problemas que aparecen en las pruebas de rendimiento de estudiantes como PISA, ENLACE, TIMSS, etc. De hecho la olimpiada de matemáticas es una forma excelente de preparar a los alumnos para estas pruebas de rendimiento.

En los entrenamientos para la olimpiada de matemáticas, cada vez que propongo un problema a un nuevo alumno, el primer comentario que hace es: - No sé qué hacer.- A menudo no tardan más de un minuto en hacerlo. Mi respuesta es: -¡EXACTO! Por eso es un problema. Si supieras qué hacer, sería un ejercicio.- Hacer ejercicios es importante en el proceso de reforzar los conocimientos aprendidos y es también importante en la olimpiada de matemáticas, pero es algo que los alumnos pueden hacer generalmente por su cuenta o con tareas. La parte más importante de los entrenamientos es la solución de problemas, no de ejercicios. El propósito es desarrollar la capacidad para resolver problemas y resolver cada vez problemas más difíciles. Aunque existen muchas estrategias para resolver problemas, lo que es indudable es que para mejorar es necesario practicar. Enfrentarse a ese “no sé qué hacer”.

Temas de Matemáticas para la Olimpiada

Antes de resumir los temas de matemáticas más utilizados en la olimpiada de matemáticas, es necesario mencionar que lo más importante, además de la concentración y la paciencia, es el sentido común y la lógica. De hecho podemos pensar en la lógica como sentido común bien estructurado y no por nada es la parte central de la matemática. Los razonamientos deben ser, antes que nada, correctos. Esto representa tener bien claras las relaciones entre causas y consecuencias y hacer deducciones correctas basado en la información que está a disposición.
Es necesario ser precavido. Reconocer lo falso de lo correcto no siempre es tan fácil. No todos los razonamientos que parecen correctos, son correctos. En el lenguaje de la lógica se llama falacia a un razonamiento falso que parece correcto o razonable.

Problema 2. Si 3 gatos cazan 3 ratones en 3 minutos, ¿cuántos minutos tarda un gato en cazar un ratón?

Una gran cantidad de alumnos responden que un gato caza un ratón en un minuto. Esto suena “razonable”, pero es falso. En este caso, basta pensar un poco más el problema para encontrar la respuesta correcta. Se espera que los alumnos participantes sean cuidadosos y capaces de resolver problemas de razonamiento lógico.

Problema 3. Andrés, Benito, Carlos y Daniel tienen sus oficinas en el mismo edificio. Uno de ellos es abogado, otro es banquero, otro es contador y otro es dentista. Si tenemos la siguiente información: - Daniel es cliente del abogado. - El contador es amigo de Benito, pero ninguno es cliente del otro. - El dentista tiene como cliente a Daniel. - Ni Andrés ni el dentista conocen a Carlos. ¿Cómo se llama el abogado?

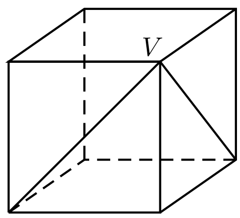
Este problema requiere extraer la información, representarla ordenadamente y hacer deducciones correctas. La dificultad de resolver el problema 3 radica muchas veces en no poder extraer toda la información que ofrece el enunciado del problema.

Los temas de matemáticas que más son necesarios en la olimpiada de matemáticas se dividen en cuatro áreas principales que son: geometría, matemáticas discretas, teoría de números y álgebra. Muchos de los temas están incluidos en los programas de educación básica y secundaria. A pesar de esto, en los entrenamientos siempre es necesario dar un repaso a esos temas enfocándose, no en aprender las cosas de memoria, sino en entender los conceptos de forma tal que puedan ser utilizados en la solución de problemas no triviales. Veremos ahora de forma breve los contenidos principales de cada una de estas áreas.

Geometría

Los problemas de geometría son (por mucho) los más comunes en la olimpiada de matemáticas y los que menos son tratados en las clases en la escuela. Uno de cada tres problemas en los exámenes de olimpiada son de geometría. Geometría se refiere a la geometría del plano y del espacio, no a la geometría analítica ni a la trigonometría. Se requiere de los resultados de ángulos entre paralelas, ángulos opuestos por el vértice, suma de ángulos en un triángulo, definición de tipos de triángulos (equilátero, isósceles, triángulo rectángulo, etc.), postulados de triángulos congruentes, área de figuras elementales y el teorema de Pitágoras. En entrenamientos posteriores se cubren más temas de geometría, pero el énfasis está en el razonamiento geométrico y no en aprenderse fórmulas.

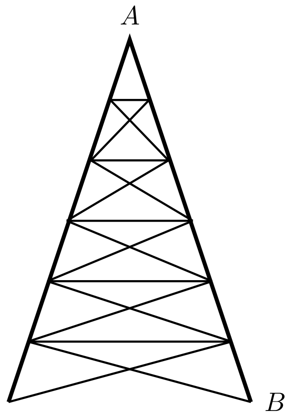
Problema 4. En dos caras no opuestas de un cubo se trazan diagonales a partir de uno de los vértices. Encuentra la medida del ángulo formado entre ellas. (Nota: Un cubo es una figura sólida formada por seis caras cuadradas, se puede pensar en un dado.)



Matemáticas discretas

Este tema se refiere a las situaciones donde se trata con conjuntos finitos o conjuntos que pueden enumerarse $(1, 2, 3, \ldots)$. Los problemas de este tipo incluyen temas de combinatoria, permutaciones, principios de conteo, conjuntos y otros que se cubren en etapas posteriores. Algunos de los problemas más interesantes son de conteo. Aunque los niños aprenden a contar desde los 4 años, contar puede no ser tan fácil algunas veces.

Problema 5. ¿Cuántos caminos distintos se pueden seguir para llegar del punto A al punto B en la figura de la "torre petrolera" si sólo está permitido moverse hacia abajo y hacia los lados, pero no hacia arriba?



Teoría de Números

En algunos libros se le llama también aritmética, pero no se refiere sólo a saber sumar, restar, multiplicar y dividir. En teoría de números se trata sobre problemas que se refieren a las propiedades de los números enteros $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Son importantes los conceptos de múltiplo, divisor, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, número primo, factorización en primos, algoritmo de la división, residuo y sistema decimal.

Problema 6. Es fácil ver que $1,000 \times 1,000 = 1,000,000$. ¿Existen dos números enteros que no tengan ceros como dígitos y que al multiplicarlos den como resultado $1,000,000$?

Álgebra

Aunque el álgebra está bien cubierta en el programa de las escuelas, los problemas de álgebra suelen ser los más complicados para los participantes, esto a pesar de que no se utilizan temas avanzados. Se requiere manipular expresiones algebraicas, conocer los identidades o productos notables (diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, suma y diferencia de cubos), factorización, leyes de los exponentes y radicales, solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, soluciones de la ecuación cuadrática, razones y proporciones (regla de tres), progresiones aritméticas, progresiones geométricas y desigualdades. El problema 1, por ejemplo, representa una progresión aritmética, pero hay otros tipos de problemas.

Problema 7. Si x, y son dos números que cumplen

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ x^2 + y^2 &= 2, \end{aligned}$$

encuentra el valor de $x^3 + y^3$.

Estrategias elementales para resolver problemas

Ya en 1945 Polya escribió un libro sobre el tema de solución de problemas. Se mencionan 4 pasos en el proceso de solución. Entender el problema, hacer un plan, desarrollar el plan e interpretar los resultados. Pocas personas están acostumbradas e seguir estos pasos. La mayoría de las personas espera que la idea brillante para resolver el problema se le ocurra de forma milagrosa y no está dispuesta a "perder el tiempo" con ideas o planes que no llevan a la solución. Pero cuando tenemos un problema, no es posible predecir si una idea será útil o inútil sin haberla desarrollado.

Las buenas ideas provienen de la experiencia,
la experiencia proviene de las malas ideas.
Proverbio de los nativos americanos.

En ocasiones la "idea brillante" se nos ocurre, pero ésto pasa sólo cuando el problema es suficientemente sencillo comparado con nuestra experiencia, con problemas más complicados es necesario ayudarnos. La generación de ideas y planes es un proceso creativo. ¿Qué hacer cuando no tenemos ideas? Algunas de las estrategias más comunes y útiles son muy conocidas y consisten en concentrarse en alguno de los siguientes puntos.

a) Reconoce correctamente los datos, las variables y objetivos del problema.

b) Concentrarse sólo en una parte del problema.

c) Intentar dar valores a las cantidades desconocidas.

d) Hallar un problema más simple parecido o relacionado.

e) Suponer que ya se llegó a la solución, ¿qué se puede deducir de eso?

f) Tratar de presentar la información de forma distinta (hacer un diagrama, gráfica o tabla).

Hay una gran cantidad de estrategias adicionales. Se recomienda consultar especialmente [1] y [4] de la bibliografía.

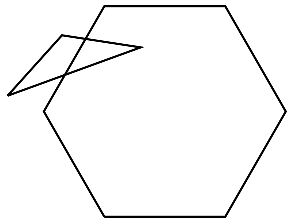
En los problemas 1, 5 y 6 evidentemente una de las cosas que dificulta los problemas es la magnitud. En todos los problemas donde la dificultad es la magnitud de una cantidad, una estrategia es imaginar que esa cantidad es menor y tratar de resolver el problema que resulta. En el problema 2 vale la pena concentrarse sólo en una parte del problema, digamos el número de gatos. Si imaginamos que ese número es fijo y analizamos qué pasa con las otras cantidades, no tardaremos en hallar la solución correcta. En el problema 3 conviene representar la información de alguna manera visual, porque es difícil mantener todos los datos en la mente como para hacer los razonamientos. En el problema 4 podría ser suficiente construir un pequeño modelo para sospechar cuál es la respuesta. La justificación es un poco más delicada, ya que es una demostración geométrica. Pero es conveniente meditar en la pregunta: ¿Cómo justifico que un ángulo mide x grados? En el problema 7 la respuesta no es 3, y aunque es posible resolver el sistema de ecuaciones, hay una solución más simple. Conviene observar bien los elementos que aparecen (cuadrados, suma de cubos). La suma de cubos se puede factorizar, pero ¿qué te recuerda la expresión $x^2 + y^2$? ¿Conoces algo en álgebra que contenga esa expresión?

Lista de problemas

Como lo hemos mencionado, lo más importante al enfrentarse a un problema es concentrarse y ser paciente. Los problemas presentados aquí fueron creados o elegidos de forma que pueden ser resueltos con un mínimo de conocimientos teóricos para las primeras etapas de la olimpiada de matemáticas en Nuevo León, pero no por esto son fáciles. No están ordenados necesariamente por grado de dificultad. Esto en parte por lo complicado de determinar la "dificultad" de un problema, pero también porque normalmente no es conveniente para el alumno saber de antemano si el problema es fácil o difícil. Recomendamos dedicar no menos de 20 ó 30 minutos a cada problema y en caso de no poder encontrar la solución, generar muchas ideas.

Problema 8. El primer examen selectivo para la olimpiada de matemáticas en Nuevo León tiene 20 preguntas. Cada pregunta tiene un valor de 3 puntos si es contestada correctamente, 0 puntos si es contestada equivocadamente y 1 punto si se deja sin contestar. La calificación de los participantes es la suma de los puntos obtenidos en los 20 problemas. ¿Cuántas calificaciones distintas se pueden obtener en el examen? Si el examen es de opción múltiple y cada problema tiene 4 opciones, qué conviene más, ¿adivinar las respuestas o dejar el examen sin contestar?

Problema 9. En la figura se muestra un triángulo y un hexágono regular cuya intersección es una figura de 3 lados (un triángulo). Dibuja un hexágono regular y un triángulo (no tiene que ser equilátero) de modo que la figura formada por la intersección de ambos tenga el máximo número posible de lados. Justifica que no es posible obtener otra figura con más lados.



Problema 10. Supongamos que desea resolverse el problema 1 (la suma de todos los impares menores a $1,000,000$) haciendo toda la operación:

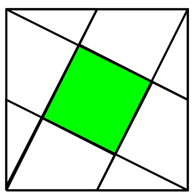
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 999,997 + 999,999 =$$

en una calculadora. Si tardamos 1 minuto en presionar 100 teclas de la calculadora, ¿cuánto tiempo tardaremos en obtener el resultado de la suma?

Problema 11. En una pizzería las pizzas medianas miden 8 pulgadas de diámetro y cuestan $\$55$. La pizza familiar mide 16 pulgadas de diámetro y cuesta $\$165$. Un grupo de amigos quiere comprar varias pizzas, no saben si comprar seis pizzas medianas o comprar dos familiares. ¿Cuál de estas dos opciones les da más “pizza por su dinero”?

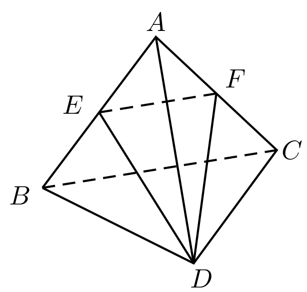
Problema 12. El precio de los dulces en una tienda es menor a $\$2.00$, pero mayor a $\$1.03$. En la tienda se vendieron todos los dulces a un total de $\$31.45$. Si todos los dulces valen lo mismo, ¿cuántos dulces se vendieron?

Problema 13. El lado del cuadrado grande mide 10 metros. Si se unen los puntos medios de los lados con los vértices, ¿cuál es el área del cuadro central? Nota: La respuesta no es $25\,m^2$.



Problema 14. Encuentra todos los valores de x que sean solución de la ecuación: $8^x + 2 = 4^x + 2^{x+1}$.

Problema 15. Considera una pirámide triangular formada por cuatro triángulos equiláteros (también se llama tetraedro regular). Llamamos a los vértices A, B, C, D. Si E es el punto medio de AB, F es el punto medio de AC y los cuatro triángulos equiláteros tienen lados de longitudes $2\,cm$, encuentra el área del triángulo DEF.



Problema 16. Encuentra (sin usar calculadora y sin aproximar con decimales) el valor numérico exacto de la siguiente expresión:

$$\sqrt{4+\frac{3}{2}\sqrt{7}}+\sqrt{4-\frac{3}{2}\sqrt{7}}.$$

Problema 17. Los números de dos dígitos 96 y 46 tienen la curiosa propiedad de que al multiplicarlos el resultado es igual al obtenido si cambiamos la posición de los dígitos de cada uno. Es decir $96 \times 46 = 69 \times 64$. Determina si que existe otro número de dos dígitos; distinto de 46, que tiene la misma propiedad al multiplicarlo por 96. ¿Cuántos números diferentes hay con esta propiedad?

Problema 18. En un baile había 28 personas, N de ellas eran mujeres. La mujer 1 bailó con 5 hombres, la mujer 2 bailó con 6 hombres, la mujer 3 bailó con 7 hombres y así sucesivamente hasta la mujer N que bailó con todos los hombres. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres había en el baile?

Problema 19. Un lógico (L) y un matemático (M) son amigos y cumplen años el mismo día. En una de sus fiestas de cumpleaños platican sobre sus respectivas edades. Aquí está el diálogo:
L: Estoy pensando en tres números enteros que multiplicados dan 2450 y sumados dan tu edad.
M: Después de pensarlo mucho, no puedo saber con seguridad en cuales números estás pensando.
L: Cada uno de los números es menor a mi edad.
M: Ahora ya sé cuáles son los números en los que estás pensando.
Encuentra las edades de ambos amigos.

Problema 20. Un grupo de pintores debe pintar 279 puertas de las cuales 186 puertas deben ser pintadas de blanco y el resto deben ser pintadas de negro. Durante la primera mitad del día todos los pintores se dedican a pintar puertas blancas. En la segunda mitad del día, la mitad de los pintores pintan puertas blancas y la otra mitad pintan puertas negras. Las puertas blancas quedan terminadas justo al terminar el primer día, pero no todas las negras. El siguiente día es dedicado por un solo pintor para terminar de pintar el resto de las puertas negras. ¿Cuántos pintores había?

Consideraciones finales

Como sugerencia para los profesores es necesario mencionar que los problemas deben ser, antes que nada, interesantes y estimulantes para los alumnos. Pocos están dispuestos a dedicar 30 minutos a pensar una situación que parece tediosa o aburrida. También es importante no enfrentar a los alumnos con problemas demasiado difíciles (ni demasiado fáciles). Los problemas fáciles aburren y los difíciles frustran. Tampoco es conveniente dar la solución de los problemas. Es preferible dar sugerencias, especialmente tratar de imaginar, ¿cómo se le puede a alguien haber ocurrido esta idea? Lo mejor es impulsar al alumno para que tenga sus propias ideas.

También recomendamos no descartar las ideas de los alumnos si son diferentes de las soluciones conocidas. No debemos olvidar que el propósito no es solamente hallar la solución, sino aprender y desarrollar las habilidades para resolver problemas. De esta forma, sin importar si al final se resuelve el problema o no, siempre será de beneficio para el alumno (y el profesor).

Esperamos que este material pueda servir como una introducción amigable a los problemas y temas propios de la olimpiada de matemáticas. Todos los involucrados en estas competencias sabemos que la primera impresión al acercarse a estos problemas por parte de alumnos y profesores, no siempre es fácil. Existe una gran cantidad de material publicado en la Web pero no aparece ordenado por grado de dificultad y suele ser complicado encontrar el material adecuado. Para aquellos lectores que desean continuar conociendo problemas interesantes y mejorando sus habilidades para resolver problemas usando material escrito, recomendamos los siguientes libros.

Bibliografía

1. E. Bono. *Lateral Thinking.* Penguin Books 1978.
2. D. Fomin, S. Genkin, I. Itenberg. *Mathematical Circles: Russian Experience.* American Mathematical Society 1996.
3. http://sites.google.com/site/eommnl/
4. G. Polya. *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas 2005.
5. A. Posamentier, C. Salkind. *Challenging Problems in Geometry.* Dover 1996.
6. P. Zeitz. *The Art and Craft of Problem Solving.* Wiley 2006.