Algunas demostraciones del teorema de Pitágoras

Por Ana Rechtman Bulajich

Nivel básico

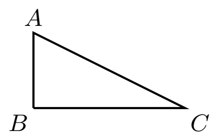
El teorema de Pitágoras es sin duda uno de los más utilizados en los problemas de geometría de las olimpiadas. En este texto vamos a presentar varias demostraciones de dicho teorema, y una de su recíproco. Empecemos con un poco de historia.

Pitágoras nació en la isla de Samos, en Grecia, en el año 582 antes de nuestra era. Siendo muy joven viajó a Mesopotamia y Egipto para estudiar con los filósofos de la época. Tras regresar a Samos, finalizó sus estudios con Hermodamas de Samos. Ahí, fundó su primera escuela. Posteriormente, abandonó Samos y se estableció en la Magna Grecia: en Crotona, en el sur de Italia, alrededor del año 525 de nuestra era, donde fundó su segunda escuela. Las doctrinas de este centro cultural eran regidas por reglas muy estrictas de conducta. Su escuela estaba abierta a hombres y mujeres indistintamente, y la conducta discriminatoria estaba prohibida (excepto impartir conocimiento a los no iniciados). Sus estudiantes pertenecían a todas las razas, religiones, y estratos económicos y sociales. Tras ser expulsados por los pobladores de Crotona, los pitagóricos se exiliaron en Tarento, donde Pitágoras fundó su tercera escuela.

Pitágoras era ciertamente instruido, aprendió a tocar la lira, a escribir poesía y a recitar a Homero. El esfuerzo para deducir la generalidad de un teorema matemático a partir de su cumplimiento en casos particulares ejemplifica el método pitagórico para la purificación y perfección del alma. El método pitagórico enseñaba a conocer el mundo como armonía; en virtud de ésta, el universo era un cosmos: un conjunto ordenado en el que los cuerpos celestes guardaban una disposición armónica que hacía que sus distancias estuvieran entre sí en proporciones similares a las correspondientes a los intervalos de la octava musical. En un sentido sensible, la armonía era musical; pero su naturaleza inteligible era de tipo numérico, y si todo era armonía, el número resultaba

ser la clave de todas las cosas. La voluntad unitaria de la doctrina pitagórica quedaba plasmada en la relación que establecía entre el orden cósmico y el moral. Para los pitagóricos, el hombre era también un verdadero microcosmos en el que el alma aparecía como la armonía del cuerpo.
Los pitagóricos atribuían todos sus descubrimientos a Pitágoras por lo que es difícil determinar con exactitud cuáles resultados son obra del maestro y cuáles de los discípulos. Entre estos descubrimientos está el teorema de Pitágoras, atribuido a los pitagóricos.

Teorema 1 (Pitágoras) *Sea* ABC *un triángulo rectángulo, tal que el ángulo* ABC *mide* $90°$*, entonces* $AB^2 + BC^2 = AC^2$.



El recíproco del teorema de Pitágoras también es cierto, es decir,

Teorema 2 *Sea* ABC *un triángulo. Si* $AB^2 + BC^2 = AC^2$*, entonces el ángulo* ABC *mide* $90°$.

Estos dos teoremas se pueden escribir en un solo enunciado,

“El ángulo ABC *de un triángulo* ABC *mide* $90°$ *si y solamente si* $AB^2 + AC^2 = BC^2$*.”*

Anteriormente a la escuela pitagórica, se conocían, en Mesopotamia y en Egipto, ternas de valores que se correspondían con los lados de un triángulo rectángulo, y se utilizaban para resolver problemas referentes a los triángulos rectángulos. Este hecho está indicado en algunas tablillas y papiros, pero no ha perdurado ningún documento que exponga la relación para TODO triángulo rectángulo. La pirámide de Kefrén, que data del siglo XXVI a.c., fue la primera gran pirámide que se construyó basándose en el llamado triángulo sagrado egipcio, cuyos lados están en proporción 3-4-5. Actualmente, a las ternas de números naturales que pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se les llama ternas pitagóricas: una terna de números (a, b, c) es pitagórica si $a^2 + b^2 = c^2$.

Demostraciones del teorema de Pitágoras.

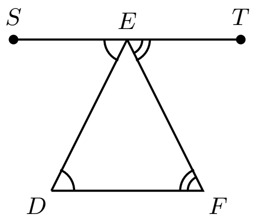
El matemático estadounidense E. S. Loomis, catalogó 367 pruebas diferentes en su libro *The Pythagorean Proposition*. Aquí vamos a explicar algunas de ellas. Empezaremos por las demostraciones que se les atribuyen a algunos matemáticos griegos, y dejaremos al final las demostraciones *gráficas* que son las más conocidas actualmente.

Demostración que algunos autores adjudican a Pitágoras

Esta es una demostración que utiliza la semejanza de triángulos[1]. Primero, necesitamos demostrar la siguiente proposición básica, que nos será útil en otras demostraciones.

Proposición 3 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a* $180°$.

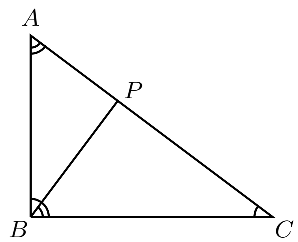
Sea EDF un triángulo cualquiera. Tracemos la recta ST paralela a DF que pasa por E.



Entonces, la relación de los ángulos entre paralelas[2] implica que

$$\angle EDF + \angle DFE + \angle FED = \angle SED + \angle TEF + \angle FED,$$

que es claramente igual a $180°$. Esto demuestra la proposición.
Regresemos ahora a la demostración del teorema de Pitágoras. Tomemos un triángulo rectángulo ABC, y sea P la base de la altura del triángulo ABC sobre la hipotenusa.



Observemos que el ángulo $\angle ABP$ es igual a $\angle BCP$, ya que como la suma de los ángulos internos de un triángulo es igua a $180°$,

$$\angle ABP = 180° - (\angle PAB + 90°) = \angle BCP.$$

Análogamente,

$$\angle PBC = 180° - (\angle BCP + 90°) = \angle PAB.$$

Por el criterio AA de semejanza[3], tenemos que los triángulos ABC, BPC y APB son

[1] Ver en el apéndice la definición SEMEJANZA.
[2] Ver en el apéndice el teorema ÁNGULOS ENTRE PARALELAS.
[3] Ver en el apéndice el criterio AA.

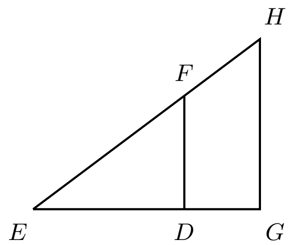
semejantes. Entonces,

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AB} \quad \Rightarrow \quad AB^2 = AC \times AP$$
$$\frac{BC}{PC} = \frac{AC}{BC} \quad \Rightarrow \quad BC^2 = AC \times PC.$$

Luego, $AB^2 + BC^2 = AC(AP + PC) = AC^2$.

Otra demostración utilizando semejanzas de triángulos

Empecemos considerando dos triángulos rectángulos semejantes EDF y EGH.



Queremos demostrar que la razón entre las áreas de los triángulos es igual al cuadrado de su razón de semejanza. La razón de semejanza es igual a

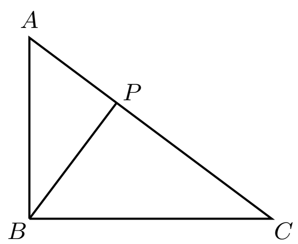
$$r = \frac{ED}{EG} = \frac{DF}{GH}.$$

Como los triángulos son rectángulos tenemos que

$$\frac{\text{área}(EDF)}{\text{área}(EGH)} = \frac{\frac{ED \times DF}{2}}{\frac{EG \times GH}{2}} = r^2.$$

Es decir, la relación entre las áreas de dos triángulos rectángulos semejantes es igual al cuadrado de su relación de semejanza.

Regresemos a nuestro triángulo ABC, con P la base de la altura sobre la hipotenusa. Vamos a volver a demostrar el teorema de Pitágoras.



Sabemos que los triángulos BPC y APB son semejantes, luego

$$\frac{\text{área}(BPC)}{\text{área}(APB)} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2,$$

entonces

$$\frac{\text{área}(BPC)}{BC^2} = \frac{\text{área}(APB)}{AB^2}.$$

Escrito de otra forma,

$$\begin{aligned} AB^2[\text{área}(BPC)] &= BC^2[\text{área}(APB)] \\ AB^2[\text{área}(BPC) + \text{área}(APB)] &= [\text{área}(APB)](AB^2 + BC^2) \\ \frac{\text{área}(BPC) + \text{área}(APB)}{AB^2 + BC^2} &= \frac{\text{área}(APB)}{AB^2} = \frac{\text{área}(BPC)}{BC^2}. \end{aligned}$$

Por otro lado, como los triángulos BPC y ABC son semejantes tenemos que

$$\frac{\text{área}(ABC)}{AC^2} = \frac{\text{área}(BPC)}{BC^2} = \frac{\text{área}(BPC) + \text{área}(APB)}{AB^2 + BC^2}.$$

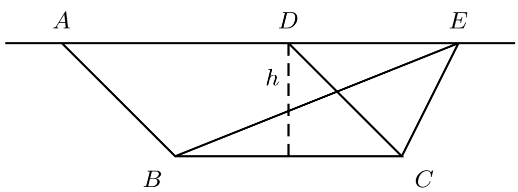
Como área$(ABC) =$ área$(BPC) +$ área(APB), concluimos que

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

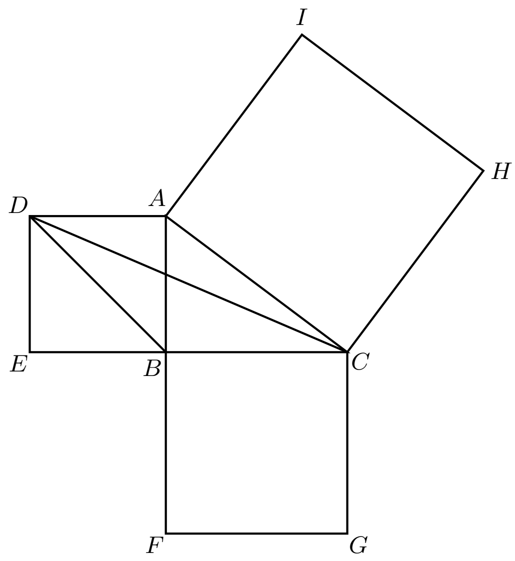
La demostración de Euclides

El filósofo Euclides, quien vivió alrededor del año 300 antes de nuestra era, es considerado el padre de la geometría del plano, que en su honor es conocida como geometría euclidiana. La demostración que vamos a explicar es la que aparece en su libro *Los Elementos*. Para la demostración necesitamos probar el siguiente resultado, que utilizaremos también en otras demostraciones.

Proposición 4 *Un paralelogramo $ABCD$ y un triángulo EBC tienen la misma base BC y el vértice E está en la recta que contiene a AD. Entonces el área del paralelogramo es el doble que el área del triángulo.*



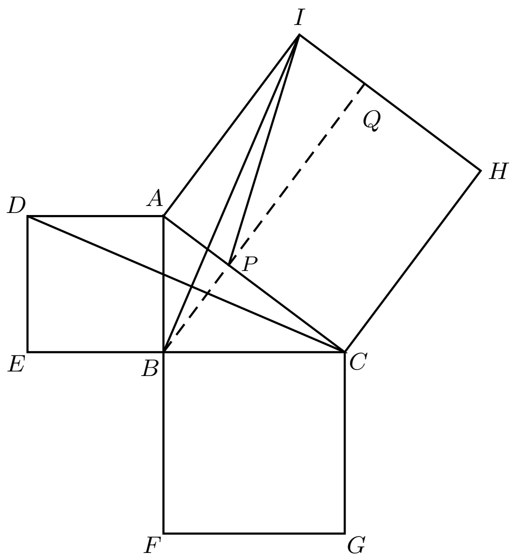
La demostración de esta proposición es muy sencilla. Sea h la distancia que hay entre las rectas paralelas que contienen los segmentos AD y BC. Entonces, el área del paralelogramo es igual a $BC \times h$ y el área del triángulo EBC es igual a $\frac{BC\times h}{2}$, sin importar donde esté el punto E, siempre y cuando esté en la recta que contiene AD.
Demostremos ahora el teorema de Pitágoras. Sea ABC un triángulo rectángulo, cuyo ángulo recto es ABC. Dibujemos en cada lado del triángulo un cuadrado.



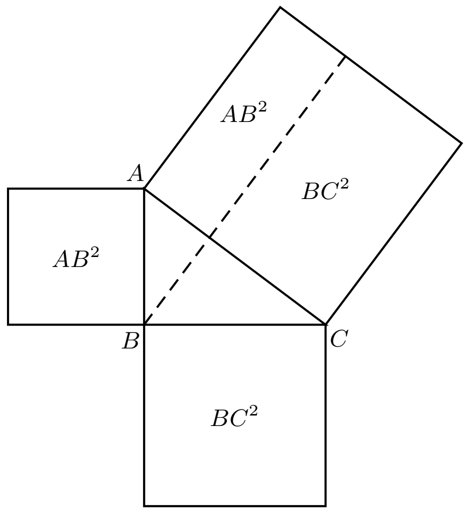
Como BC es paralela a AD, tenemos que los triángulos ADB y ADC tienen la misma área (esto es una consecuencia de la proposición anterior). Ahora, si rotamos el triángulo ADC en el vértice A, de forma que el lado AC coincida con AI y AD con AB, concluimos que los triángulo ADC y ABI son congruentes[4]. En particular, tienen la misma área. Por lo tanto, ADB y ABI tienen las mis área.

Tracemos la recta paralela a AI por B, y sea P su punto de intersección con AC. La proposición 4 implica que los triángulos ABI y API tienen la misma área, ya que BP es paralela a AI. Entonces, los triánglos ADB y API tienen la misma área. Observemos que el área del cuadrado $ADEB$ es igual a dos veces el área del triángulo ADB e igual a AB^2. Además, el área de $APQI$ es dos veces el área del triángulo API, que también es igual al área de $ADEB$, y que también es igual a AB^2.

[4]Ver en el apéndice la definición CONGRUENTES.



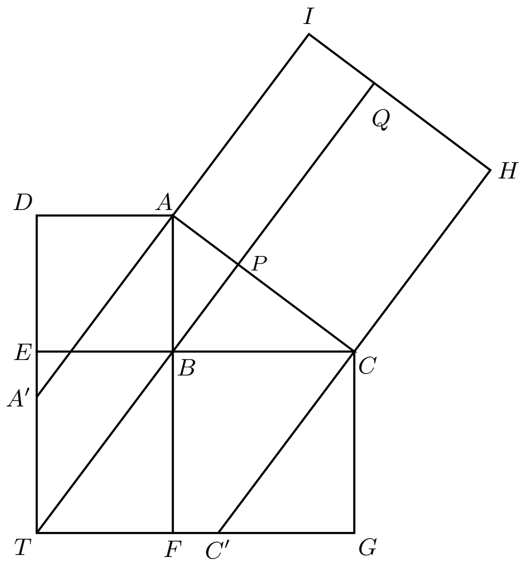
Haciendo lo mismo para el rectángulo $PCHQ$, concluimos que su área es igual a BC^2. Por lo tanto, AC^2 que es igual al área del cuadrado $ACHI$, es igual a la suma de las áreas de $APQI$ y $PCHQ$, que es igual a $AB^2 + BC^2$. Es decir, $AC^2 = AB^2 + BC^2$.



La demostración de Pappus

Pappus nació en Alejandría, de ahí que se le conoce como Pappus de Alejandría, aproximadamente en el año 290 de nuestra era y murió alrededor del 350. Es considerado como el último de los grandes geómetras griegos. La demostración de Pappus está también basada en la proposición 4, y la describiremos a continuación.

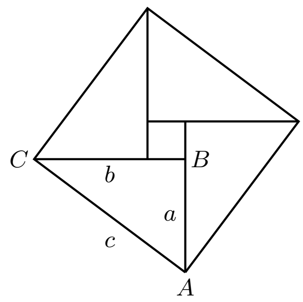
Sea ABC un triángulo rectángulo y dibujemos en cada uno de sus lados un cuadrado. Sea P la base de la altura sobre la hipotenusa, y continuemos esta recta en las dos direcciones: por un lado hasta el punto Q, que es la intersección con HI; y por otro lado hasta T que es la intersección con la prolongación de FG. Como EC es paralela a FG y AF es paralela a DE, el punto T está en la intersección de las rectas FG y DE.



La proposición 4 implica que los paralelogramos $ADEB$ y $AA'TB$ tienen la misma área. Además, los lados el triángulo BET cumplen que $AB = BE$, $BC = ET$ y $AC = BT$. Luego, $BT = AA' = AC = AI$ y los paralelogramos $AA'TB$ y $APQI$ tienen la misma área. Análogamente, concluimos que $BTC'C$ y $PCHQ$ tienen la misma área. Calculando estas áreas en términos de los lados del triángulo ABC concluimos que $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Algunas demostraciones gráficas

Como siempre tomemos un triángulo rectángulo ABC. Llamemos a, b y c a las longitudes de los lados AB, BC y AC, respectivamente. En la figura, los cuatro triángulos son congruentes entre si y congruentes a ABC.



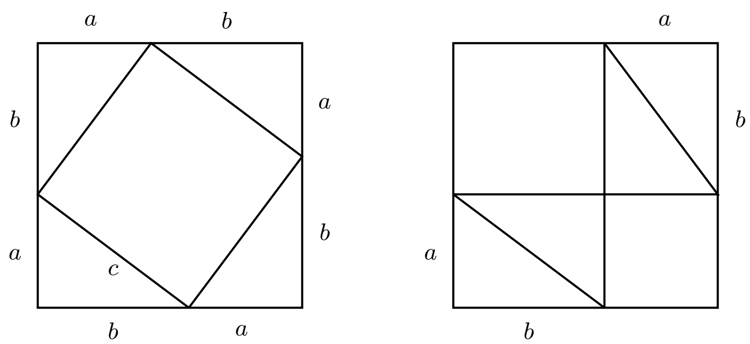
Entonces, tenemos que el área del cuadrado grande es igual a la suma de las áreas de los cuatro triángulos más el área del cuadrado pequeño, es decir,

$$\begin{aligned} c^2 &= 4\left(\frac{a \times b}{2}\right) + (b-a)^2 \\ &= 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

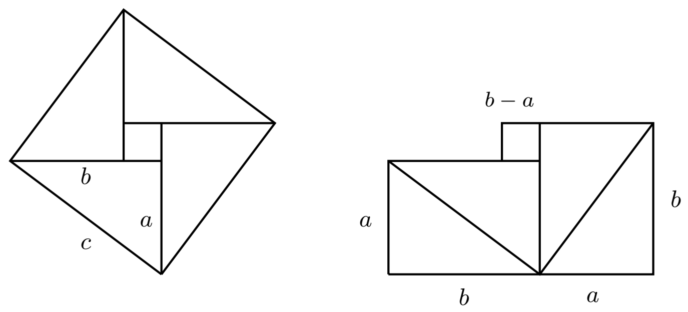
Lo que demuestra el teorema de Pitágoras.

Dejamos como ejercicio para el lector desarrollar los razonamientos que pueden acompañar las siguientes figuras para demostrar el teorema de Pitágoras.

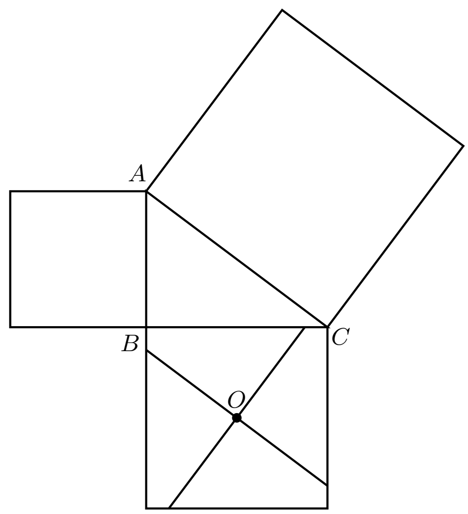
Ejercicio 1. En cada figura, los cuatro triángulos son congruentes con catetos a, b e hipotenusa c.



Ejercicio 2. En cada figura, los cuatro triángulos son congruentes con catetos a, b e hipotenusa c. Demuestra que las dos figuras tiene la misma área (la de la primera es igual a c^2 y la de la segunda a $a^2 + b^2$).



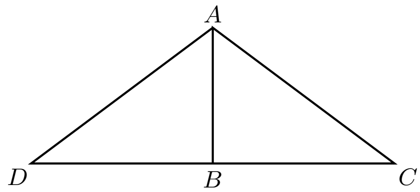
Ejercicio 3. En la figura, el punto O es el centro del cuadrado de lado BC (¿podría ser otro punto?) y se trazaron por este punto una recta paralela a la hipotenusa y otra perpendicular a la hipotenusa. Si recortas este cuadrado por dichas rectas obtienes cuatro piezas. Acomoda estas cuatro piezas y el cuadrado de lado AB dentro del cuadrado de lado AC, para encontrar otra demostración del teorema de Pitágoras.



Demostración del recíproco del teorema de Pitágoras

Vamos a dar una demostración del recíproco del teorema de Pitágoras, que es la demostración que aparece en el libro *Los Elementos* de Euclides.

Sea ABC un triángulo tal que $AB^2 + BC^2 = AC^2$, vamos a demostrar que el ángulo ABC es recto. Tracemos el segmento DB que mide lo mismo que BC y es perpendicular a AB.



Como ABD es un triángulo rectángulo tenemos que $AD^2 = AB^2 + DB^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2$, es decir $AD = AC$. Luego, los triángulos ABC y ABD son congruentes pues sus lados miden lo mismo[5]. Esto implica que $\angle ABC = \angle ABD$ y el triángulo ABC es rectángulo.

Ejercicio 4. Encuentra otra demostración del recíproco del teorema de Pitágoras.

Ejercicios

Los problemas de práctica $8, 10$ y 18 de este número utilizan el teorema de Pitágoras. Te invitamos a resolverlos.

Bibliografía

1.- E. S. Loomis, *The Pythagorean Proposition*. NCTM. Michigan, 1940.

2.- Animación (en francés): http://www.mathkang.org/swf/pythagore2.html.

[5] Ver en el apéndice el CRITERIO CONGRUENCIA LLL