Demostrando por Inducción

Por Francisco Ruiz Benjumeda

La comprensión del infinito es uno de los retos más apasionantes que existen para el entendimiento humano. Todo lo que conoce el ser humano es finito[1] y su experiencia sobre el mundo también lo es. En matemáticas, el concepto de infinito es central. En la mayoría de las ocasiones, los matemáticos trabajan con conjuntos de objetos (como los números) que son infinitos. Muchas de las propiedades, resultados o teoremas se establecen para una infinidad de casos, objetos o situaciones. La demostración de dichas propiedades requiere de métodos ingeniosos que permitan validarlas, no sólo para un número finito de casos particulares, sino para una infinidad de ellos. Uno de éstos es el método de Inducción Matemática, mismo que sirve para probar o establecer que una determinada propiedad se cumple para todo número natural.

Es difícil establecer cuando se usó por primera vez este método de demostración, pero existen evidencias de que sus ideas principales se remontan a tiempos muy antiguos. Desde épocas anteriores a Cristo, es posible encontrar trabajos de matemáticos que contienen razonamientos cercanos a la inducción matemática, tal es el caso de la demostración de Euclides (300 AC) sobre la existencia de una infinidad de números primos.

Alrededor del siglo X, Al-Karaji (953-1029 DC), matemático persa musulmán, trabajó el terorema del binomio y la generación de sus coeficientes (triángulo de Pascal) utilizando un método que incluye los pasos principales de la Inducción Matemática moderna. Posteriormente, Samau'al al-Maghribi (1130-1180 DC), extendió los trabajos de Al-Karaji, siendo su demostración el ejemplo más completo de razonamiento por Inducción Matemática de los tiempos antiguos.

Sin embargo, en ninguno de esos trabajos se establece explícitamente la hipótesis de inducción tal y como lo hacemos hoy en día. El primer matemático en hacer una exposición explícita del Principio de Inducción Matemática fue Blaise Pascal (1623-1662)[2]. También es importante mencionar las contribuciones que hizo en este campo Pierre de

[1] Finito: que tiene fin

[2] Traité du triangle arithmétique (1665)

Fermat (1601/8?-1665), quien usó ampliamente su método del Descenso Infinito, el cual es una variante del Principio de Inducción Matemática. Finalmente, en el siglo XIX, con base en los trabajos de Giuseppe Peano (1858-1932) y Richard Dedekind (1831-1916), se establece de manera definitiva el tratamiento sistemático y riguroso que se usa hoy en día para realizar demostraciones por Inducción Matemática.
Ahora, dejemos un poco de lado la historia y continuemos nuestra exposición haciendo énfasis en dos características fundamentales del conjunto de los números natrurales: en primer lugar, los naturales forman un conjunto infinito, ordenado y que cuenta con un primer elemento (el número 1) y, en segundo lugar, que el resto de los elementos del conjunto (los demás naturales) se generan a partir del número 1 mediante repetidas aplicaciones de la función sucesor: $s(n) = n + 1$.
Las propiedades anteriores son fundamentales, pues de ellas se derivan las bases lógicas que dan sustento a la validez de las demostraciones por Inducción. En su forma más básica, el método de Inducción Matemática consta de 2 etapas. Si deseamos probar que una determinada propiedad P se cumple para todo número natural, entonces procedemos aplicando el siguiente esquema[3]

- Paso 1 (Base de la Inducción).- Se demuestra que el primer natural (el número 1) cumple la propiedad: $P(1)$.

- Paso 2 (Paso Inductivo).- Partiendo de la suposición (Hipótesis de Inducción) de que un número natural cualquiera k cumple con la propiedad: $P(k)$, procedemos a demostrar que, en consecuencia, el número $k + 1$ también debe cumplir con dicha propiedad: $P(k + 1)$. Es decir, probamos la validez de la implicación $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

En caso de poder realizar exitosamente lo anterior, entonces concluimos que la propiedad P se cumple para todos los números naturales.
A continuación, veremos cómo funciona el método a través de revisar algunos ejemplos concretos.

Ejemplo 1. Pruebe que para todo número natural n

$$1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{n(n+1)}{2}.$$

Solución. Probaremos la validez de la fórmula a través de Inducción Matemática.

- Paso 1 (Base de la Inducción).- Procedemos a mostrar la validez de la fórmula para el caso $n = 1$.

$$1 = \tfrac{1(1+1)}{2} = \tfrac{2}{2} = 1$$

[3]En algunos textos, al presentar el esquema de inducción suelen diferenciarse tres etapas en lugar de dos. En estos textos, la primera etapa consiste probar la validez de $P(1)$, la segunda etapa consiste en enunciar la Hipótesis de Inducción (i.e. suponer la validez de $P(k)$, para un natural cualquiera k) y en la tercera etapa se prueba la validez de $P(k + 1)$. Nótese que en estos textos, la primera etapa corresponde exactamente con nuestro Paso 1, mientras que la conjunción de las etapas 2 y 3 es lógicamente equivalente con nuestro Paso 2, donde se prueba $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

- Paso 2 (Paso Inductivo).- Suponemos que la fórmula es válida para un número natural cualquiera $n = k$.

$$\text{Hipótesis de Inducción: } 1 + 2 + \cdots + k = \tfrac{k(k+1)}{2}$$

  y a partir de esto establecemos la validez de la fórmula para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (k+1) &= (1 + 2 + \cdots + k) + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}{2} \end{aligned}$$

  Con esto termina nuestra prueba por inducción y podemos concluir que la fórmula se cumple o es válida para todo número natural n.

Es importante darse cuenta que el principio de inducción funciona porque al demostrar que cada vez que la propiedad se cumple para un número natural cualquiera, entonces también se cumple para el siguiente. Sabiendo que la propiedad se cumple para el primer número natural (el número 1), entonces también se cumple para el número 2. Como se cumple para 2, entonces también se debe cumplir para 3 y así sucesivamente.

Ejemplo 2. Pruebe que para todo número natural n

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solución. Probaremos la validez de la fórmula a través de Inducción Matemática.

- Paso 1 (Base de la Inducción).- Procedemos a mostrar la validez de la fórmula para el caso $n = 1$.

$$1^2 = \tfrac{1(1+1)[2(1)+1]}{6} = \tfrac{1(2)(3)}{6} = \tfrac{6}{6} = 1$$

- Paso 2 (Paso Inductivo).- Suponemos que la fórmula es válida para un número natural cualquiera $n = k$.

$$\text{Hipótesis de Inducción: } 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \tfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

y a partir de esto establecemos la validez de la fórmula para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 &= \left(1^2 + 2^2 + \cdots + k^2\right) + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6}
\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que la fórmula se cumple para todo número natural n.

Las demostraciones por Inducción pueden compararse con el efecto *dominó*. Si ponemos varias fichas de dominó paradas y colocadas en hilera una seguida de la otra, al tirar la primera ficha, ésta caerá sobre la segunda provocando su caída; la caída de la segunda provoca que caiga la tercera ficha; la tercera ficha derriba a la cuarta y así sucesivamente hasta que todas las fichas caen. En esta comparación, al caer la primera ficha se inicia una especie de reacción en cadena que termina provocando la caída de todas las fichas.
De igual forma, una vez que se han realizado las dos etapas de una demostración por Inducción, la validez de la propiedad para el número 1 (base de la inducción) implica la validez de la propiedad para el 2, la validez para el 2 implica la validez para el 3 y así sucesivamente (paso inductivo), de manera que podemos concluir que la propiedad es válida para todos los números naturales.
Aunque en su forma más simple la Inducción Matemática se usa para probar que determinada propiedad se cumple para todo número natural, es posible adaptar el método para probar la validez de una afirmación para otros conjuntos de números (no solamente los naturales). A continuación, presentamos un tercer ejemplo donde se prueba la validez de una propiedad que se cumple sólo para los números impares.

Ejemplo 3. Pruebe que para todo número impar n, el número $n^2 - 1$ es divisible entre 8.

Solución. Probaremos la validez de esta propiedad de divisibilidad por medio de Inducción Matemática. Cabe señalar que en la prueba se utilizará la notación de congruencias.[4]

[4]Diremos que $a \equiv b\,(mod\, m)$, cuando $a - b = km$ para algún entero k. Si deseas conocer más a fondo algunos detalles con respecto al concepto de congruencia módulo m, te sugerimos consultar el artículo sobre este tema que aparece en tu revista Tzaloa No.2, año 2009.

- Paso 1 (Base de la Inducción).- Procedemos a mostrar la validez de la fórmula para el caso $n = 1$.

$$1^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \equiv 0 \pmod{8}.$$

- Paso 2 (Paso Inductivo).- Suponemos que la propiedad es válida para un número impar positivo cualquiera $n = 2k + 1$, donde $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

  Hipótesis de Inducción: $(2k + 1)^2 - 1 \equiv 0 \pmod{8}$.

  Ahora, con base en esto, probamos la validez de la propiedad para el siguiente impar $n = 2k + 3$.

$$\begin{aligned}
(2k+3)^2 - 1 &= [(2k+1)+2]^2 - 1 \\
&= (2k+1)^2 + 2(2)(2k+1) + 4 - 1 \\
&= (2k+1)^2 - 1 + 4(2k+1) + 4 \\
&= \left[(2k+1)^2 - 1\right] + 8k + 8
\end{aligned}$$

  Aplicando la hipótesis de inducción tenemos

$$(2k+3)^2 - 1 = \left[(2k+1)^2 - 1\right] + 8k + 8 \equiv 0 + 0 + 0 \pmod{8}.$$

  Por lo que se concluye que $n^2 - 1 \equiv 0 \pmod{8}$ para todo número impar n.

En este ejemplo, pudimos ver cómo el esquema de Inducción Matemática puede ser modificado para probar que una propiedad se cumple para un conjunto que no sea necesariamente el de los números naturales. Esto pudo hacerse porque el conjunto de los impares cumple con las dos propiedades básicas que fundamentan el Principio de Inducción: los impares forman un conjunto ordenado que tiene un elemento mínimo (el número 1) y el resto del conjunto se genera a partir de este elemento mínimo mediante aplicaciones repetidas de la función sucesor para impares $s(i) = i + 2$.

$$1,\ s(1) = 3,\ s(3) = 5,\ s(5) = 7,\ s(7) = 9, \text{etc.}$$

A este tipo de conjuntos se les llama conjuntos *bien ordenados*. Los naturales es el ejemplo más conocido de conjunto bien ordenado. De la misma manera que la Inducción Matemática tradicional se usa para demostrar que una propiedad se cumple para el conjunto de los números naturales, podemos usar métodos *adaptados* de inducción para probar que una propiedad se cumple para otros conjuntos, siempre y cuando estos sean bien ordenados.

Ejemplo 4. Pruebe[5] que $n! > 3^{n-2}$, para todo natural $n \geq 3$.

Solución. Procedemos a probar por Inducción la validez de la desigualdad para todo número natural $n \geq 3$.

[5] Recuerde que $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ \ldots \ \cdot n$.

- Paso 1 (Base de la Inducción).- Procedemos a mostrar la validez de la desigualdad para el primer caso $n = 3$.

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 > 3^1 = 3^{3-2}$$

- Paso 2 (Paso Inductivo).- Suponemos que la desigualdad es válida para $n = k$, donde k es un número natural cualquiera tal que $k \geq 3$.

  Hipótesis de Inducción: $k! > 3^{k-2}$

  Ahora probamos la validez de la desigualdad para $n = k + 1$, donde $k \geq 3$.

$$(k+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot \ k \cdot (k+1) = k! \cdot (k+1).$$

  Aplicando la hipótesis de inducción tenemos

$$(k+1)! = k!(k+1) > 3^{k-2} \cdot (k+1) > 3^{k-2} \cdot 3 = 3^{k-1} = 3^{(k+1)-2}.$$

  Por lo que se concluye que $n! > 3^{n-2}$, para todo natural $n \geq 3$.

En este último ejemplo pudimos observar cómo el método de inducción se puede usar comenzando en un natural distinto de uno. En algunos casos tenemos que una determinada propiedad se cumple para todo número natural $n \geq m$, en estos casos el esquema de Inducción se modifica, de manera que en vez de probar la base de la inducción para $n = 1$, se hace para $n = m$.
Para concluir nuestra exposición, trataremos otra variante del Principio de Inducción que para ciertos problemas suele ser más cómoda que la versión original. En esta variante, conocida como *Inducción Fuerte* o *Inducción Completa*, se plantea la hipótesis de inducción de manera más general: se supone que la propiedad es válida para $m \leq k$, en lugar de suponer que la propiedad es unicamente válida para k. Cabe mencionar que ambos principios (Inducción e Inducción Fuerte) son lógicamente equivalentes, por lo que pueden ser usados indistintamente y la elección de cuál de ellos usar no debe tener otra consideración adicional que la facilidad que presente uno u otro principio para resolver el problema.
Para ilustrar el uso del Principio de Inducción Fuerte, en el siguiente ejemplo expondremos la prueba de una propiedad de los números de Fibonacci. Antes de presentar el ejercicio recordemos cómo se define la sucesión de Fibonacci

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_n &= F_{n-2} + F_{n-1}, \text{ para } n \geq 3. \end{aligned}$$

Es así, que los primeros números de la sucesión de Fibonacci son

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...$$

Ejemplo 5. Pruebe que para todo entero $n \geq 1,\ F_n < 2^n$.

Solución. Procedemos a probar por Inducción Fuerte la validez de esta propiedad de los números de Fibonacci.

- Paso 1 (Base de la Inducción).- Procedemos a mostrar la validez para los números F_1 y F_2

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 < 2^1 \\ F_2 &= 1 < 4 = 2^2 \end{aligned}$$

- Paso 2 (Paso Inductivo).- Sea k un número natural cualquiera tal que $k \geq 2$. Suponemos que la propiedad se cumple para todo número F_m, donde $1 \leq m \leq k$.

  Hipótesis de Inducción: $F_m < 2^m,$ para $1 \leq m \leq k$.

  Usando la Hipótesis de Inducción para F_{k-1} y $F_k,$ establecemos la validez de la propiedad para F_{k+1}, con $k \geq 2$.

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_{k-1} + F_k \\ &< 2^{k-1} + 2^k \\ &= 2^{k-1} + 2 \cdot 2^{k-1} \\ &= (1+2) \cdot 2^{k-1} \\ &= 3 \cdot 2^{k-1} \\ &< 2^2 \cdot 2^{k-1} \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

  Por lo que se concluye que $F_n < 2^n,$ para todo natural n.

A pesar de que cuando usamos el esquema de Inducción Fuerte, en la hipótesis de inducción suponemos la validez de la propiedad para todos los casos donde $m \leq k$, es frecuente que en el desarrollo del paso inductivo sólo sea necesario utilizar algunas de las instancias posibles. Nótese que en el ejemplo anterior sólo usamos 2 instancias de la hipótesis de inducción: para $m = k$ y para $m = k - 1$.

Otro detalle del último ejemplo que merece especial atención está en la demostración de la base de la inducción: al probar la base de la inducción no sólo se hizo para F_1, sino que además fue necesario hacerlo también para F_2. Lo anterior obedece a la naturaleza misma de la sucesión de Fibonacci, ya que esta se genera a partir de F_1 y F_2 mediante la definición: $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, para $n \geq 3$. En este caso, el conjunto de Fibonacci es un conjunto bien ordenado con la propiedad especial de contar con 2 elementos mínimos: F_1 y F_2, que son los generadores del conjunto y, por lo tanto, la base de la inducción debe ser probada para ambos.

Como pudimos ver en este artículo, la Inducción Matemática permite probar la validez de fórmulas y propiedades que se cumplen para todos los números naturales. Asimismo, también vimos que este método es igualmente útil cuando se requiere probar una propiedad para otros conjuntos, siempre y cuando estos sean bien ordenados.

Las ideas que sustentan al Principio de Inducción se remontan a épocas muy antiguas y su formalización se ha venido refinando con el paso del tiempo. Debido a su enorme poder, actualmente se le utiliza de manera muy extensa tanto en matemáticas como en ciencias de la computación. Existen muchas variantes de este principio, que van desde las versiones equivalentes (como el Principio de Inducción Fuerte o el Principio del Buen Orden[6]) hasta los esquemas de inducción para el caso de ordinales transfinitos[7].

EJERCICIOS

1. Pruebe que 3 es divisor de $n^3 + 2n$ para todo entero positivo n.

2. Pruebe si n es un entero positivo cualquiera, entonces se cumple la siguiente fórmula para la suma de cubos

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3. El juego de Nim se juega entre dos personas con las siguientes reglas: Se pone un número n de fichas iguales sobre la mesa. Cada jugador en su turno puede tomar 1, 2 ó 3 fichas. El jugador que toma la última ficha pierde. Demuestre que el primer jugador tiene una estrategia ganadora siempre y cuando $n \not\equiv 1 \pmod 4$.

4. Pruebe que el número total de diagonales que tiene un polígono convexo de n lados ($n \geq 3$), es $\frac{n(n-3)}{2}$.

5. Pruebe que para todo entero positivo n

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

6. Considere la sucesión de Fibonacci $F_1, F_2, \ldots$ y demuestre que

$$(F_1)^2 + (F_2)^2 + \cdots + (F_n)^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

7. Pruebe que $(3n)! > 2^{6n-4}$ para todo entero positivo n.

Bibliografía

1. Swokowski, Earl. *Álgebra Universitaria*. CECSA, México 1987.

2. De Oteyza, et. al. *Temas Selectos de Matemáticas*. Prentice Hall, México 1988.

3. Courant R, H. Robbins. *¿Qué son las Matemáticas?* FCE, México 2002.

[6]El Principio del Buen Orden establece que: *Si P es un subconjunto no vacio de números naturales, entonces P tiene un elemento mínimo.*

[7]Los ordinales transfinitos son números construidos con la teoría de conuntos y que están *más allá* del infinito de los números naturales. El estudio de estos números (Aritmética Transfinita) tiene sus orígenes en los trabajos del matemático francés Georg Cantor (1845-1918).