Los paseos de Leonhard Euler

Por Ana Rechtman Bulajich

"Lean a Euler, lean a Euler, él es el maestro de todos nosotros"
Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827)

Leonhard Euler es considerado como uno de los principales matemáticos del siglo XVIII, y como uno de los más importantes de la historia de las matemáticas. Nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza, y murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia. La mayor parte de su vida vivió en Rusia y Alemania. Sus aportaciones matemáticas abarcan distintas áreas, como el cálculo y la teoría de gráficas. En física, sus mayores aportaciones pertenecen a los campos de la mecánica, la óptica y la astronomía. Una de sus aportaciones a la teoría de gráficas, actualmente un campo activo de investigación, es de la que hablaremos en este artículo.

En 1736, Leonhard Euler resolvió el problema conocido como *problema de los puentes de Königsberg*. En esa época, la ciudad de Königsberg pertenecía a Prusia Oriental. Actualmente, se le conoce como Kaliningrado y pertenece a Rusia. El río Pregel atraviesa la ciudad formando dos islas, y en la época de Euler había siete puentes conectando las distintas partes de la ciudad, como se muestra en la figura 1.

Los habitantes de la ciudad se preguntaban si era posible encontrar un paseo que cruzara cada puente una sola vez. El río no podía ser cruzado por ningún otro medio, y el paseo tenía que comenzar y terminar en el mismo lugar. Esta pregunta es el problema de los puentes de Königsberg.

Euler respondió la pregunta, mostrando que es imposible encontrar un paseo con estas características. A esta solución se le considera el primer teorema de teoría de gráficas.

Sigamos el análisis de Euler: Lo primero que observó es que la trayectoria que se escoge entre dos puentes es irrelevante, lo único importante en la trayectoria es el orden en el cual se cruzan los puentes. Esta observación le permitió reformular el problema en términos más abstractos. Cada una de las cuatro partes de la ciudad puede ser representada por un punto y entre dos puntos se dibujan líneas para indicar los puentes, obteniendo el diagrama de la figura 2.

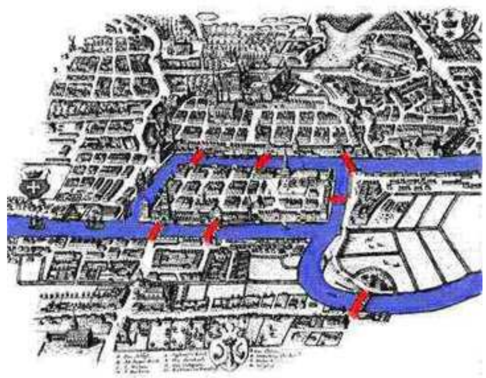

Figura 1: Disposición de los puentes de Königsberg en 1736

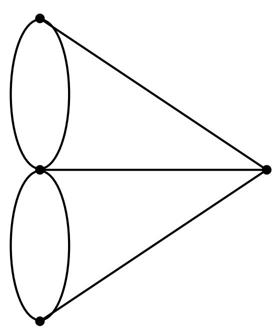

Figura 2: Gráfica asociada al problema de los puentes de Königsberg

En términos modernos, a los puntos se les llama *vértices*, a las líneas *aristas* y el diagrama es una *gráfica*. En estos términos, el problema es encontrar una forma de recorrer todas las aristas, pasando por cada una sólo una vez, y empezando y terminando el recorrido en el mismo vértice. Podemos expresar el problema en términos más sencillos aún: ¿se puede o no dibujar la gráfica de la figura 2 sin separar el lápiz de la hoja de papel y sin recorrer ninguna línea más de una vez?
Una vez simplificado el problema, Euler hizo la siguiente observación: cada vez que uno llega a un vértice por un puente (o arista), tiene que dejar dicho vértice por otro puente (o arista). En otras palabras, a lo largo del paseo el número de veces que uno llega a un vértice es igual al número de veces que uno se va de dicho vértice. Entonces, el número de aristas que tocan cada vértice tiene que ser un número par. Esta observación es suficiente para demostrar que el problema de los puentes de Königsberg no tiene solución: en la figura 2, a cada vértice de la gráfica lo tocan un número impar de aristas.
Regresando a los términos modernos, al número de aristas que convergen en un vértice se le conoce como la *valencia* del vértice. El hecho de que exista un paseo por la gráfica que recorra cada arista una sola vez, y que empiece y termine en el mismo vértice, depende únicamente de la valencia de los vértices de la gráfica. Puesto en otras palabras, todas la valencias tiene que ser pares. A un recorrido de este tipo se le llama un *paseo euleriano*, en honor a Leonhard Euler.
En teoría de gráficas se habla también de *caminos eulerianos*. La diferencia entre los caminos y los paseos eulerianos es que en los primeros no se pide que el vértice de inicio sea el vértice final. En este texto vamos a suponer que un camino euleriano siempre empieza y termina en vértices distintos.

¿Cómo saber si una gráfica puede ser recorrida a lo largo de un camino euleriano?

El análisis de Euler nos permite dar una respuesta a esta pregunta. Observemos primero que la valencia de los vértices intermedios, es decir los vértices que no son ni el inicial ni el final, tiene que ser un número par. La razón es que para cada vértice intermedio el número de veces que llegamos a él es igual al número de veces que nos vamos de él. El mismo argumento implica que las valencias de los vértices inicial y final tienen que ser números impares. Luego, concluímos que un gráfica tiene un camino euleriano si dos de sus vértices tiene valencia impar y el resto valencia par. Por lo tanto, la gráfica de la figura 2 tampoco puede ser recorrida a lo largo de un camino euleriano.
Veamos otro ejemplo. En la gráfica de la figura 3, no podemos encontrar un paseo euleriano que inicie en A, ya que la valencia de este vértice es impar. Sin embargo, como los vértices A y B son los únicos vértices con valencia impar, sí hay un camino euleriano por la gráfica (que tiene que ir de A a B, o viceversa).
Juguemos ahora con variantes del problema de los puentes de Königsberg. Supongamos además que en la isla central hay un cementerio (que en el diagrama 4 está marcado con †) y que los habitantes del pueblo A quieren encontrar un camino que los lleve al cementerio y recorra cada uno de los puentes una sola vez, es decir, quieren encontrar un camino euleriano que los lleve de A a †.
Después de analizar el problema, los habitantes de A llegaron a la conclusión de que para poder realizar un camino euleriano que los lleve al cementerio tienen que construir

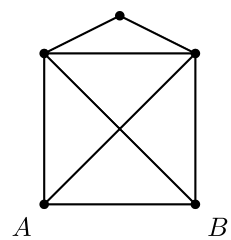

Figura 3: Otra gráfica

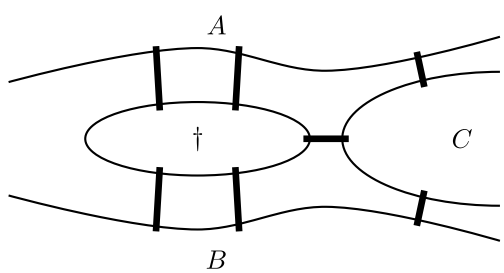

Figura 4: Los puentes entre los pueblos y el cementerio

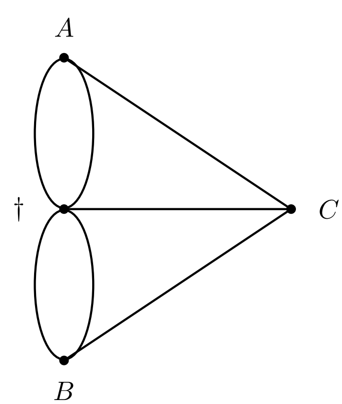

Figura 5: Gráfica asociada al problema de los dos pueblos y el cementerio

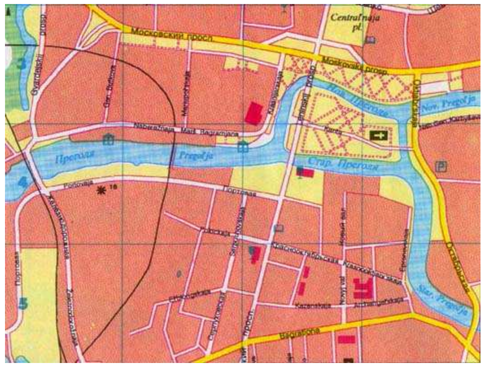

Figura 6: Disposición de los puentes de Königsberg actualmente

un octavo puente. ¿Dónde tiene que estar dicho puente?
Analicemos el problema en la gráfica de la figura 5. Para encontrar un camino euleriano, necesitamos que las valencias de los vértices A y † sean impares, y que las valencias de los vértices B y C sean pares. Es decir, tenemos que cambiar las valencias de los vértices B y C. Luego, los habitantes del pueblo A tienen que construir un puente que vaya del poblado B al C.

Algunas preguntas

1. Si ahora los habitantes del pueblo B desean ir al cementerio recorriendo cada puente una sola vez, ¿tienen que construir algún puente? Si la respuesta es afirmativa, ¿dónde tienen que construir el puente?

2. En la gráfica de la figura 3, ¿cuántos caminos eulerianos hay que vayan del vértice A al vértice B?

3. Dos de los puentes de Königsberg fueron destruidos durante los bombardeos ingleses de la segunda guerra mundial. Otros dos fueron destruidos por el ejército ruso durante la batalla de Königsberg contra los alemanes. Esta batalla duró tres meses y la ganaron los rusos. Los últimos dos puentes fueron reemplazados y actualmente hay cinco puentes cuya disposición se puede ver en el plano de la figura 6. ¿Hay paseos eulerianos y/o caminos eulerianos en la Königsberg moderna?

4. Las aristas de un gráfica pueden estar dirigidas, como en las gráficas de la figura 7. ¿Puedes decir si las gráficas se pueden recorrer a lo largo de paseos y/o caminos eulerianos dirigidos? Encuentra un criterio para decidir rápidamente si una gráfica dirigida puede ser recorrida a lo largo de un paseo o un camino euleriano dirigido (piensa en definir una valencia de entrada y una valencia de salida para cada vértice).

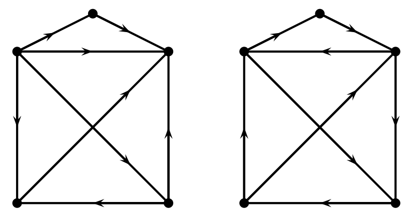

Figura 7: Gráficas dirigidas

Bibliografía

1. William Dunham. *Euler: The Master of Us All*. Mathematical Association of America, 1999.

2. L. Euler. *Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de física y filosofía*, traducción al español Carlos Mínguez Pérez. Universidad de Zaragoza, Prensas Universitarias, 1990.

3. P. Taylor. *What ever happened to those bridges?* Australian Mathematics Trust, 2000.
   www.amt.canberra.edu.au/koenigs.html