TEORÍA DE NÚMEROS

(Noviembre de 2021 - Enero de 2022)

T E M A R I O

1. DIVISIBILIDAD

a) Definición y propiedades básicas

b) Criterios de divisibilidad

c) Factorizaciones notables

d) Números primos y números compuestos (parte 1)

2. MÉTODOS

a) Inducción matemática

b) Reducción al absurdo

3. ALGORITMO DE LA DIVISIÓN EN $\mathbb{Z}$

a) El algoritmo de la división

b) Máximo común divisor

c) El algoritmo de Euclides y la propiedad $(a, b) = ax + by$

d) Mínimo común múltiplo

e) Números primos y números compuestos (parte 2)

4. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

a) Existencia y unicidad de la descomposición

b) Conteo de divisores

c) El mcd y el mcm a través de la descomposición

d) Otras aplicaciones: detección de potencias perfectas, análisis de algunas ecuaciones diofánticas

5. CONGRUENCIAS

P R O B L E M A S

1. Sean a, b y c números enteros.

a) Demuestre que si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (b - c)$.

b) Demuestre que si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid bc$.

2. Determine todos los números enteros positivos n y k tales que

$$(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1.$$

3. Demuestre las tres afirmaciones siguientes:

a) $\forall n \in \mathbb{Z}^+,\ 6 \mid (7^n - 1)$.

b) $\forall n \in \mathbb{Z}^+,\ 11 \mid (3^{2n+2} + 2^{6n+1})$.

c) $\forall n \in \mathbb{Z}^+,\ 17 \mid 3(5^{2n+1}) + 2^{3n+1}$.

4. Demuestre que para todo número entero $n \geq 1$ es posible encontrar un número entero x tal que $n \leq x^2 \leq 2n$.

5. Determine cuáles son todos los pares ordenados (a, b) de números enteros positivos que satisfacen las dos condiciones siguientes:

$$(a+b)^2 = 2304 \quad \text{y} \quad a^2 + b^2 = 1250.$$

6. ¿Para qué números enteros m se cumple que $\frac{m^2+3m}{m-1}$ también es un número entero?

7. ¿Cuántos números enteros positivos tienen la propiedad de que al eliminarles la última cifra el nuevo número es $\frac{1}{14}$ del número original?

8. ¿Cuál es el menor múltiplo de 99 cuyos dígitos suman 99 y que empieza y termina con 97?

9. Todos los números de dos dígitos desde el 19 hasta el 80 se escriben en una línea sin dejar espacios. ¿Es el número así obtenido $(19202122 \cdots 7980)$ un múltiplo de 1980?

10. Un número de Murthy es un número, como 46 o 132, que tiene al menos un divisor común mayor que 1 con el mismo número invertido. El número 46

es un número de Murthy porque 46 y 64 (46 invertido) son divisibles por 2. El número 132 también lo es porque 132 y 231 son divisibles por 3. ¿Puede encontrar cinco números consecutivos que sean números de Murthy?

11. Dos jugadores van escribiendo los dígitos de un número de n cifras; el primero escribe la primera cifra por la izquierda (distinta de cero), el segundo la segunda y así sucesivamente. Si el número resultante es múltiplo de 11, gana el jugador que ha escrito la última cifra; en caso contrario, gana el otro. ¿Alguno de los jugadores puede aplicar una estrategia que le permita ganar siempre?

12. Sea $N \in \mathbb{Z}^+$. Alice y Bob juegan el siguiente juego. Bob cuenta los pares ordenados (a, b) de números enteros positivos tales que $a+b = N$. Alice cuenta lo pares ordenados (c, d) de números enteros positivos tales que $c^{-1} + d^{-1} = N^{-1}$. Gana el jugador que obtiene el mayor número de pares ordenados. ¿Para cuáles N's gana Alice?

13. ¿Es primo el número $20\,201\,234\,567\,892\,021$?

14.

a) Sea m un número entero mayor que 1. Demuestre que si $2^m - 1$ es un número primo entonces m es un número primo.

b) Sea n un número entero positivo. Demuestre que si $2^n + 1$ es un número primo entonces n es una potencia de 2.

15. Demuestre que $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ es un número compuesto para todo número entero positivo n.

16. Utilizando la factorización $n^4 - 20n^2 + 4 = (n^2 - 4n - 2)(n^2 + 4n - 2)$, demuestre que $n^4 - 20n^2 + 4$ es un número compuesto para todo $n \in \mathbb{Z}$.

17. ¿Para cuántos números enteros n se cumple que $n^4 + 4^n$ es un número primo?

18. Determine todos los números enteros positivos n tales que $n^8+n^6+n^4+4$ sea un número primo.

19. Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, denotemos con R_n al número $\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ unos}}$. Demuestre que si R_n es un número primo, entonces n es un número primo.

20. ¿Cuáles de los números 2017, 2018, 2019 pueden ser expresados en la forma $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ para algunos enteros positivos x, y, z?

21. Determine todos los números enteros x, y que cumplen que

$$(x^3 - 1)(y^3 - 1) = 3(x^2y^2 + 2).$$

22. Demuestre que si $n \in \mathbb{Z}$ es tal que $n^2 + 11$ es un número primo entonces $n + 4$ no es un cubo perfecto.

23. Sea B un número entero mayor que 10 tal que cada uno de sus dígitos pertenece al conjunto $\{1, 3, 7, 9\}$. Demuestre que B tiene un factor primo mayor o igual que 11.

24. Lucía multiplica varios números de una cifra (posiblemente repetidos) y obtiene un número entero mayor que 10. Luego multiplica todas las cifras de n y obtiene un número impar. Determine todos los posibles valores de la cifra de las unidades de n.

25. Diego trabaja 4 días de la semana y descansa el quinto. En una ocasión empezó a trabajar un lunes y descansó un día domingo. ¿Cuál es la menor cantidad de días que tuvo que trabajar para que esto fuera posible?

26. Si $11n$ deja resto 6 cuando se divide entre 7, ¿qué resto deja $5n$ cuando se le divide entre 7?

27.

a) Determine todos los pares ordenados (x, y) de números enteros positivos tales que $615 + 2^x = y^2$.

b) Determine todos los pares ordenados (x, y) de números enteros positivos tales que $615 + x^2 = 2^y$.

28. Demuestre que $641 \mid (2^{32} + 1)$.

29. Determine todas las ternas (a, b, c) de números enteros positivos que satisfacen las tres condiciones siguientes:

a) $a < b < c$,

b) a, b y c son números primos,

c) a, b y c son números impares *consecutivos.*

30. Demuestre que si un número primo p se puede escribir en la forma

$$p = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2,$$

donde q_1, q_2, q_3 son números primos y $q_1 < q_2 < q_3$, entonces $q_1 = 3$.

31.

a) Demuestre que el producto de dos números enteros que dejan resto 1 en la división por 4 es un tercer número que deja resto 1 en la división por 4. (Este ejercicio también se puede formular de la siguiente manera: *Demuestre que el producto de dos números enteros de la forma* $4k + 1$ *es otros número de esa misma forma.*)

b) Utilizando lo demostrado en el inciso anterior, demuestre por reducción al absurdo que el conjunto conformado por los números primos de la forma $4k + 3$ es infinito. **Sugerencia:** Suponga que el conjunto de los números primos de la forma $4k + 3$ es finito y que todos ellos están comprendidos en la siguiente lista: $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Considere a continuación el número $\mathcal{P} = 4(q_1 \cdots q_n) - 1$. ¿Qué puede decir sobre $\mathcal{P}$?

32. Denotemos con p_n al n-ésimo número primo (por ejemplo, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.). Demuestre que ninguno de los números $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ es un cuadrado perfecto.

33. Denotemos con p_n al n-ésimo número primo (por ejemplo, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.). Demuestre que

$$p_n > 3n$$

para todo número entero $n \geq 12$.

34. ¿Para qué números enteros positivos n se cumple que el máximo entero menor o igual que $\frac{n^2}{3}$ es un número primo?

35. Si 3 números primos mayores que 3 están en progresión aritmética, demuestre que la diferencia común de la progresión aritmética es un múltiplo de 6.

36. En una bodega hay dos contenedores: en uno hay 198 litros de jugo de naranja y en el otro hay 144 litros de jugo de piña. Para su transporte se requiere guardar el jugo en el menor número de envases iguales, ¿cuál debe ser la capacidad máxima de estos envases para que no sobre jugo?

37. Sean a, b y c números enteros tales que $(a, b) = 1$, $a \mid c$ y $b \mid c$. Demuestre que $a \cdot b \mid c$.

38.

a) Sean a, b y q números enteros positivos. Suponga que $(a, q) = (b, q) = 1$. Demuestre que $(ab, q) = 1$.

b) Sean a y b números enteros positivos. Suponga que $(a, b) = 1$. Demuestre que $(ab, a + b) = 1$.

39. Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Demuestre que si $(a, b) = 1$ entonces el máximo común divisor de $a + b$ y $a^2 - ab + b^2$ es 1 o 3.

40. Demuestre que si n es un número entero positivo entonces

$$\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + 2n}$$

es una fracción irreducible.

41. El producto de las edades de los hijos de Arturo es $1\,664$. La edad del más grande es el doble de la edad del más pequeño. ¿Cuántos hijos tiene Arturo en total?

42. En una encuesta, a una mujer le preguntaron cuántos hijas tenía y la edad de cada una de ellas. Ella dijo:

"Tengo 3 hijas, sus edades son números enteros y el producto de sus edades es 36."

El encuestador le dijo que esa información no era suficiente para determinar la edad de cada una de las hijas. Ella replicó:

"Le diría la suma de sus edades, pero se quedaría en las mismas."

El encuestador insistió en que le diera al menos otro dato para determinar las edades; a esa petición la madre respondió:

"Está bien: a la mayor de mis hijas le encanta el helado de vainilla."

¿Cuáles son las edades de las 3 hijas?

43. Determine todos los números primos p tales que $2p + 1$ es un cubo perfecto.

44. Determine todos los números primos p tales que $9p + 1$ es un cubo perfecto.

45. Definamos y denotemos a "n superfactorial" por $n¡ = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdots n^n$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 1¡ &= 1 \\ 2¡ &= 1 \cdot 2^2 = 4 \\ 3¡ &= 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 108 \end{aligned}$$

Si la lista anterior se continuara se observaría que, al calcular $5¡$, se obtiene un número que termina en cinco ceros. ¿En cuántos ceros termina 100 superfactorial?

46.

a) Sea n un número entero mayor que 1 y suponga que la descomposición canónica de n es $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Demuestre que n es un cuadrado perfecto si y sólo si 2 divide a cada uno de los α_i.

b) Sea n un número entero positivo. Demuestre que n es un cuadrado perfecto si y sólo si $\tau(n)$ es un número impar.

(Recuerde que $\tau(n)$ es igual al número de divisores positivos del número n.)

47. Suponga que a y b son números enteros positivos tales que $\tau(a^b) = 5$ y $\tau(b^a) = 7$. ¿Cuántos divisores positivos tiene el número $a \cdot b$?

48. ¿Existen números enteros x, y tales que $\tau(x^2 + x + 1) = y^2 + y + 1$?

49. Suponga que f es una función de los números enteros positivos en los enteros positivos que tiene la siguiente propiedad: para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $f(f(n)) = \tau(n)$. Demuestre que si p es un número primo entonces $f(p)$ es un número primo.

50. Sean $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k = n$ los divisores del número entero positivo n. Determine cuáles son todos los números n tales que $n = d_2^2 + d_3^3$.

51. El Hotel de Hilbert tiene planta baja (piso 0) y 1000 pisos. De la planta baja parten 5 elevadores: el elevador A para en todos los pisos, el elevador B para en los pisos $0, 5, 10, 15, \ldots$, el elevador C para en los pisos $0, 7, 14, 21, \ldots$, el elevador D para en los pisos $0, 17, 34, 51, \ldots$ y el elevador E para en los pisos $0, 23, 46, 69, \ldots$.

a) Explique por qué no hay ningún piso, salvo la planta baja, en el que paren todos los elevadores.

b) Determine cuáles son todos los pisos en los que paran exactamente 4 de los cinco elevadores.

52. Denotemos con $\text{mín}(\alpha, \beta)$ al menor de los elementos del conjunto $\{\alpha, \beta\}$; por ejemplo, $\text{mín}(5, 2) = 2$.

a) Demuestre que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\text{mín}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}. \tag{1}$$

b) Denotemos con $\text{máx}(\alpha, \beta)$ al mayor de los elementos del conjunto $\{\alpha, \beta\}$. Proponga y demuestre una fórmula para $\text{máx}(\alpha, \beta)$ parecida a la fórmula en (1).

c) Sean a y b números enteros positivos. Demuestre que $(a, b)[a, b] = a \cdot b$.

53. Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Demuestre que $(a, b) = (a + b, [a, b])$.

54.

a) El máximo común divisor de dos números enteros positivos u y v es 6 y su mínimo común múltiplo es igual a 900. ¿Es posible que la suma de u y v sea igual a 270?

b) Determine cuáles son todos los números enteros positivos tales que $(a, b) = 36$ y $[a, b] = 756$.

55. El número entero positivo n y el número primo p cumplen que p no divide a $(3n)!$ pero sí divide a $(3n + 1)! + (3n + 2)!$. Demuestre que 3 divide a $p - 1$.

56. Demuestre que si alguno de los términos de una progresión aritmética es un cuadrado perfecto entonces en esa progresión aritmética aparecen una infinidad de cuadrados perfectos.

57. Decimos que un número natural n es *casi cuadrado* si es igual al producto de dos números enteros positivos consecutivos. Demuestre que todo número casi cuadrado se puede representar como un cociente de dos números casi cuadrados.

58. Demuestre que para cada entero $n > 1$ existen enteros x, y tales que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{y(y+1)}.$$

59. Sea n un número entero positivo y sea $s(n)$ el números de parejas ordenadas (x, y), de números enteros positivos, tales que

$$(x+1)^2 - xy(2x - xy + 2y) + (y+1)^2 = n.$$

Determine cuál es el menor número entero positivo n tal que $s(n) = 61$.

60. Determine para qué números enteros positivos x, y y z se cumple que $x^3 + y^3 = (3xyz + 1)^2$.