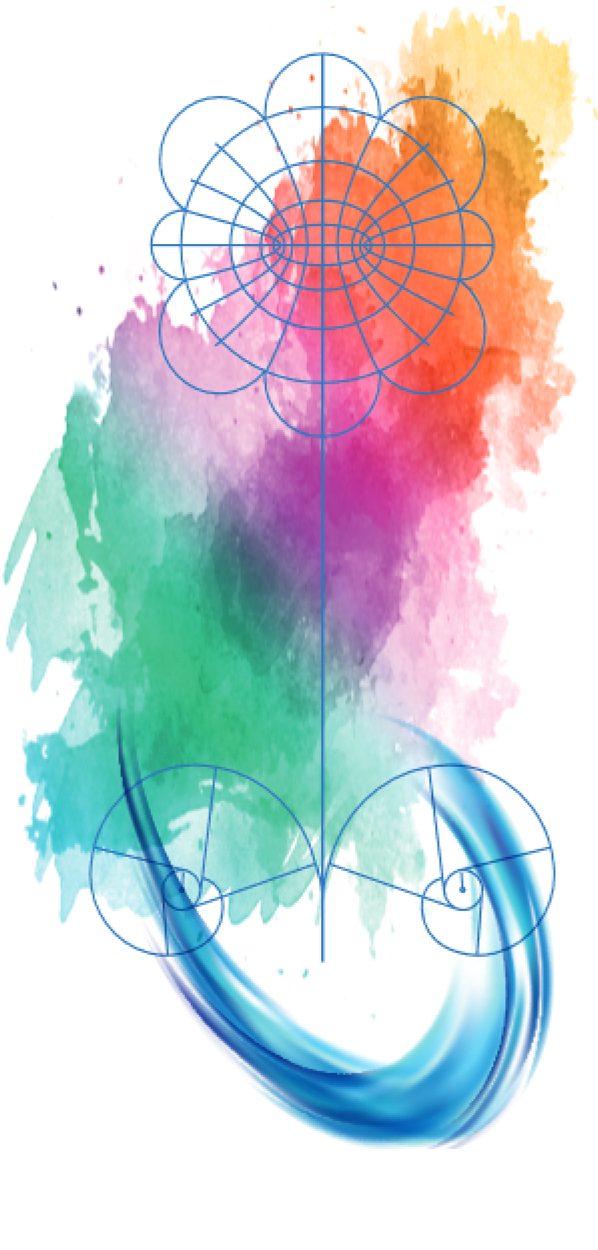
LAS PRIMERAS SEIS OMMEB

MATERIAL EXTRAÍDO DE LA REVISTA TZALOA



Gro., MÉXICO - Nov. de 2022

TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2017, No. 4

Concurso Nacional de la 1ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Educación Básica

Del 15 al 18 de junio de 2017 se llevó a cabo, en Oaxtepec, Morelos, la 1^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Educación Básica (OMMEB) en los niveles de primaria y secundaria, con la participación de 192 estudiantes representando a 23 entidades federativas. Cada equipo estuvo integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes. La OMMEB está compuesta de tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria o una institución equivalente.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente.

Hay dos tipos de exámenes: individual y por equipos. El nivel I de la prueba individual constó de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Cada problema tuvo un valor de 5 puntos y solo la respuesta final es necesaria para obtener los puntos correspondientes. No se dan puntos parciales y no hay penalización por respuesta incorrecta.
Los niveles II y III de la prueba individual constaron de 15 problemas para resolver en 120 minutos. Los problemas se dividen en dos partes. La parte A consiste de 12 problemas de 5 puntos cada uno, en los cuales solo la respuesta es requerida. En esta parte no hay puntos parciales y no hay penalización por respuesta incorrecta. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre de 20 puntos cada uno, donde se pueden otorgar puntos parciales.
En los tres niveles, la prueba por equipos consistió de 8 problemas, de 40 puntos cada uno, a resolver en 70 minutos.

De manera individual, se otorgaron medallas de oro, plata y bronce, así como menciones honoríficas a $\frac{2}{3}$ de los participantes, aproximadamente en razón $1:2:3:4$. También se otorgaron medallas de oro, plata y bronce a los mejores equipos de cada categoría.

Los 5 alumnos que obtuvieron medalla de oro en el nivel I fueron:

Eduardo Calderón Jácquez (Chihuahua).
Rosa V. Cantú Rodríguez (Ciudad de México).
Ana P. Galindo Romero (Morelos).
Fernando Álvarez Ruiz (Nuevo León).
Javier Mena Chávez (Zacatecas).

Los 4 alumnos que obtuvieron medalla de oro en el nivel II fueron:

Leonardo M. Cervantes Mateos (Ciudad de México).
Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México).
Karla R. Munguia Romero (Sinaloa).
Jacobo De Juan Millón (Yucatán).

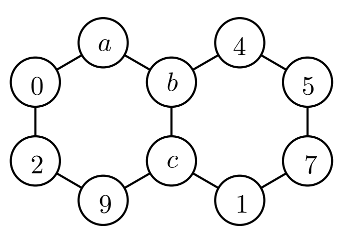
Los 4 alumnos que obtuvieron medalla de oro en el nivel III fueron:

Alberto Sosa Borunda (Chihuahua).
Tomás F. Cantú Rodríguez (Ciudad de México).
Darío Hinojosa Delgadillo (Nuevo León).
Teresa Rojas Rodríguez (Yucatán).

A continuación presentamos los problemas y soluciones del concurso nacional de la 1^a OMMEB.

Prueba individual. Nivel I.

1) Los diez dígitos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ se han colocado cada uno dentro de un círculo de manera que las dos sumas, de los seis números en cada hexágono, son iguales. ¿Cuál es el valor de $b + c - a$?



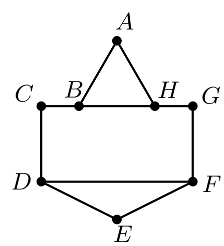
2) En la siguiente operación cada letra representa un dígito entre 0 y 9. ¿Cuánto vale la suma $o + m + m + e + b$?

$$\begin{array}{cccc} o & m & m & e \\ + & b & 3 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

3) Víctor y Vicky compraron un pastel y se lo comieron de la siguiente manera: Una mañana Víctor se comió la mitad del pastel, por la noche Vicky se comió la mitad del pastel que quedaba. Este proceso siguió de la misma manera durante 4 días, comiendo cada uno la mitad del pastel que encontraban. En la mañana del quinto día, Víctor se comió lo que quedaba del pastel. ¿Qué proporción del pastel comió Víctor en los 5 días?

4) Dada la lista de números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ una *sublista* se forma tomando al menos un número de la lista y ordenados de menor a mayor, por ejemplo $1, 2, 8$ es una *sublista*. Encuentra la cantidad de *sublistas* en las que ninguno de los números $2, 3, 5$ o 7 aparecen.

5) La siguiente figura está compuesta por el triángulo equilátero ABH; el rectángulo $CDFG$ y el triángulo isósceles DEF; de manera que $AB = DE$ y $CD = 2BC = 2GH$. Si el perímetro de DEF es 8 y el perímetro de $CDFG$ es 10, ¿Cuál es el perímetro de la figura?



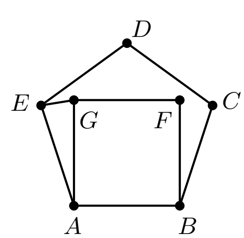
6) Los enteros positivos a, b, c, d, e cumplen con:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e+1}}}} = \frac{268}{187}.$$

Encuentra el valor de $a + b + c + d + e$.

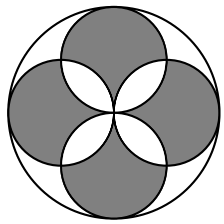
7) Al imprimir un libro, el impresor no incluyó las hojas que tienen páginas que terminan con la cifra 8. Si el total de las cifras de las páginas que no se incluyeron es 230; ¿cuál es el número máximo de páginas que puede tener el libro original?

8) En la siguiente figura, $ABCDE$ es un pentágono regular y $ABFG$ es un cuadrado. ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo $\angle GED$?



9) El número $100\ldots00200\ldots001$ se formó con un 1 seguido de 2017 ceros, luego un 2, seguido de otros 2017 ceros y al final un 1. ¿Cuántos ceros tiene la raíz cuadrada del número?

10) En la figura siguiente, la circunferencia mayor tiene radio 2 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, de la región sombreada?



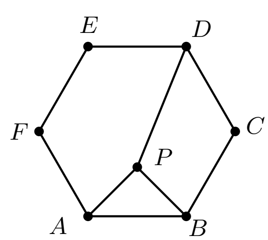
11) A Pedro y a María les dejaron de tarea recortar círculos de cartón en fracciones. María recortó cada círculo en 8 partes. Pedro las recortó en 6 partes. En total recortaron 30 círculos y María terminó con el doble de piezas que Pedro, ¿cuántos círculos recortó María?

12) Las bases de un trapecio miden 18 cm y 8 cm, y los otros dos lados, 8 cm y 6 cm. Encuentra la longitud, en centímetros, del segmento que une los puntos medios de las bases.

13) ¿Cuántos enteros de 2 dígitos existen tales que al multiplicarlos por 3 se obtiene un número de 3 dígitos, todos ellos iguales?

14) Encuentra la cantidad de enteros positivos de 5 dígitos distintos, tales que cada uno de sus tres dígitos intermedios es igual al promedio de sus dos dígitos adyacentes. Un ejemplo de estos números es 12345.

15) Sea $ABCDEF$ un hexágono regular de lado 2 cm. Sea P un punto dentro del hexágono de tal manera que $\angle APB = 90°$ y que $AP = PB$. Encuentra el valor, en cm^2, de DP^2.



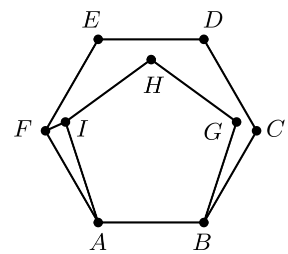
Prueba individual. Nivel II.

Parte A.

1) Coincide con el Problema 3 del Nivel I.

2) Coincide con el Problema 4 del Nivel I.

3) En la siguiente figura, $ABCDEF$ es un hexágono regular y $ABGHI$ es un pentágono regular. ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo $\angle IFE$?



4) Coincide con el Problema 13 del Nivel I.

5) Si se lanzan 3 dados, calcula la probabilidad de que el producto de los números que quedaron boca arriba tenga exactamente dos divisores positivos.

6) Coincide con el Problema 15 del Nivel I.

7) Al realizar la multiplicación $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+2017)$, ¿Cuál es el coeficiente de x^{2016}?

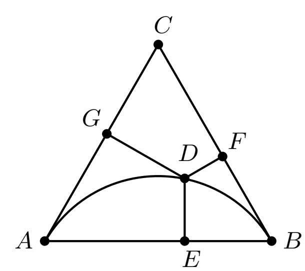
8) Coincide con el Problema 14 del Nivel I.

9) Se escriben en fila los números naturales a partir del 50, excluyendo aquellos que tienen alguna cifra 3:

$$5051525455565758596061626 4\ldots$$

¿Qué cifra queda en el lugar 2017?

10) En la siguiente figura, D es un punto sobre el arco AB, los segmentos CA y CB son tangentes al arco en los puntos A y B, respectivamente, y los puntos E, F y G son los pies de las perpendiculares desde D a los lados AD, BC y CA, respectivamente. Si $DG = 9$ cm y $DF = 4$ cm, calcula, en cm, la longitud DE.



11) Encuentra el máximo común divisor de 111444444 y 444111111.

12) Encuentra todos los enteros positivos x, que cumplan la ecuación

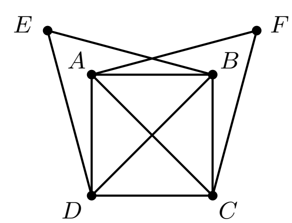
$$x^3 - 2017x - 360 = 0.$$

Parte B.

1) Encuentra la suma de todos los números positivos primos relativos con 100 y que sean menores que 100.

2) Un entero positivo se dice *balanceado* si todos sus dígitos aparecen la misma cantidad de veces. Por ejemplo, 1234, 101022 y 777 son números *balanceados*. Encuentra la cantidad de números balanceados menores a 10^4.

3) Sean $ABCD$ un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ cm y E, F puntos tales que ACF y BDE son triángulos equiláteros. Encuentra la razón del área del cuadrilátero $DCFE$ entre el área del cuadrilátero $ABFE$.

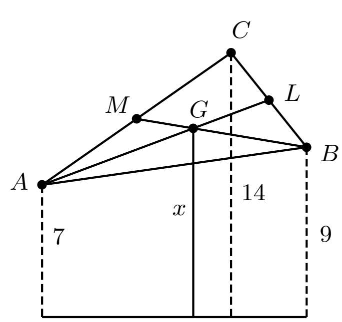


Prueba individual. Nivel III.

Parte A.

1) El número $10!$ tiene 270 divisores positivos. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar uno de ellos al azar, este divisor sea impar?

2) Las distancias desde los tres vértices A, B, C de un triángulo ABC a una recta dada miden 7 cm, 9 cm y 14 cm, respectivamente. Sean L y M los puntos medios de BC y CA, respectivamente, y sea G el punto de intersección de AL y BM. Calcula la distancia, en centímetros, desde G a dicha recta.



3) Coincide con el Problema 9 del Nivel II.

4) Coincide con el Problema 11 del Nivel II.

5) Coincide con el Problema 5 del Nivel II.

6) Coincide con el Problema 7 del Nivel II.

7) Coincide con el Problema 10 del Nivel II.

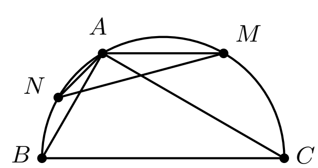
8) Coincide con el Problema 12 del Nivel II.

9) Sea $\mathcal{M}$ el conjunto $1, 2, 3, \ldots, 2017$. Para cada subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}$ se denota por $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ a la suma de todos los elementos de $\mathcal{A}$. Calcula el promedio de todos los números $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$.

10) Encuentra todos los números de tres cifras que sean cuadrados perfectos y tales que el número que se obtiene al invertir el orden de sus cifras también sea un cuadrado perfecto.

11) En un autobús van seis pasajeros, cada uno lleva un boleto con número, los 6 números son distintos. Además los números de los boletos cumplen que ninguno es múltiplo de 5 y para cada número de boleto hay exactamente otro, de los cinco restantes, de manera que ese par de números no tiene divisores positivos en común, aparte del 1. ¿Cuál es el número más pequeño que se puede obtener al multiplicar los números de los seis boletos?

12) En el triángulo ABC, el segmento AB mide 1 cm, $\angle BAC = 90°$ y $\angle CBA = 60°$. Además M y N son los puntos medios de los arcos $\widehat{AC}$ y $\widehat{AB}$, respectivamente, de la semicircunferencia. Calcula, en cm^2, el valor del área del triángulo ANM.



Parte B.

1) Coincide con el Problema 3 del Nivel II.

2) Los números enteros positivos a, b y c son distintos y satisfacen que

$$a \mid b + c + bc, \quad b \mid c + a + ca, \quad c \mid a + b + ab.$$

Prueba que al menos uno de los números a, b, c no es primo.

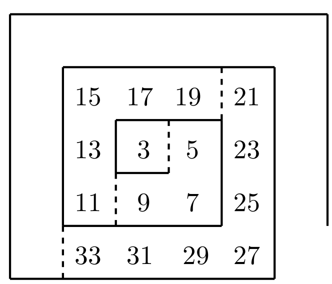
3) El número natural M tiene exactamente 6 divisores positivos cuya suma es 3500. Encuentra todos los valores posibles de M.

Prueba por equipos. Nivel I.

1) Toño fue a la tienda. Tanto Toño como el señor de la tienda tienen solo monedas de 1, 2, 5 y 10 pesos. Toño afirmó: "Puedo pagar con 3 monedas y de cambio recibir 2 monedas de valor distinto a las que usé para pagar". ¿Cuáles son todas las posibles cantidades que puede pagar Toño?. Toma en cuenta que Toño nunca usaría monedas de más, es decir, no usa monedas que al quitarlas, el valor de las monedas restantes siga siendo mayor o igual a la cantidad que debe pagar.

2) Una pulga salta sobre los vértices de un polígono regular de 2017 lados. Los vértices están numerados consecutivamente del 1 al 2017. La pulga inicia en el vértice 6, siempre salta 4 vértices y cae en el quinto más adelante (por ejemplo, del vértice 20 llega al 25), pero se regresa 2 vértices cuando cae en un vértice numerado con una potencia de 2 (por ejemplo, después de un posible salto $27-32$, regresa al 30). ¿Después de cuántos saltos la pulga supera por primera vez el 1?

3) Se colocan los números impares $3, 5, 7, 9, \ldots$, siguiendo una espiral como se muestra en la figura. El número 3 quedo en un primer cuadrado de 1×1, al poner el 9 se cerró un segundo cuadrado de 2×2, un tercer cuadrado se cerró al poner el 19. ¿Qué número cierra el cuadrado número 18?



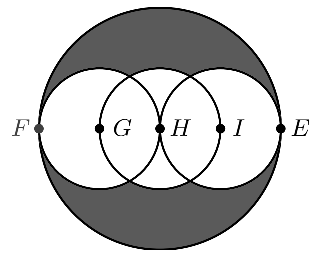
4) Los nadadores Omar, Mario, Miguel, Edgar y Beto van a competir en una carrera de 100 metros libres en una alberca de 5 carriles. Se acomodan en los carriles de forma que:

   1. Beto no nada al lado de Mario, ni de Edgar.
   2. Omar nada en un extremo.
   3. Miguel nada en medio de dos personas y ninguna de ellas es Mario.
   4. Edgar no está en los carriles 2, 3 ni 5.

   Indica en qué carril está cada uno de los competidores.

5) Determina la cantidad máxima de triángulos que tienen sus tres vértices en algunos de los puntos de intersección de 6 rectas y ninguno de sus lados está sobre alguna de las rectas.

6) El diámetro *FE* mide 4 cm y se divide en 4 partes iguales: *FG* $=$ *GH* $=$ *HI* $=$ *IE*. Se trazan circunferencias con diámetros *FH*, *GI* y *HE*. ¿Cuánto mide el área sombreada, en cm^2?



7) Encuentra todos los números múltiplos de 3, de 4 cifras, ninguna de ellas igual a 2 o 4, tales que al dividirlos entre 3, resulte un número de 4 cifras con exactamente las mismas cifras del número original.

8) El número de la casa de Joaquín es el 932. Joaquín se da cuenta que este número cumple las siguientes condiciones:

   a) Todos los dígitos son positivos y aparecen en orden decreciente $(9 > 3 > 2 > 0)$.

   b) La suma de 932 con el número que se obtiene invirtiendo el orden de los dígitos es un número que tiene todos sus dígitos impares $(932 + 239 = 1171)$.

   ¿Cuáles números de 3 dígitos, incluyendo el 932, tienen estas dos propiedades?

Prueba por equipos. Nivel II.

1) Coincide con el Problema 3 del Nivel I.

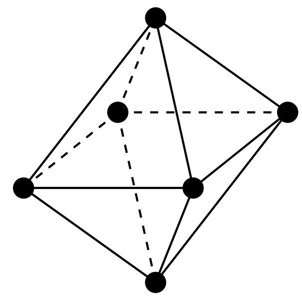
2) Coincide con el Problema 4 del Nivel I.

3) Sean $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$ y $A_1A_2B_3\ldots B_nB_{n+1}$ dos polígonos regulares con n y $n+1$ lados, respectivamente, tales que comparten el lado A_1A_2. Además, el polígono $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$ es interno al polígono $A_1A_2B_3\ldots B_{n-1}B_nB_{n+1}$. Encuentra todos los valores de $n > 3$ tales que

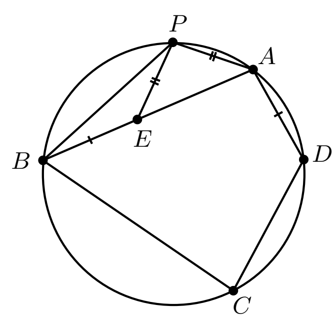
$$\angle A_nB_{n+1}B_n = \frac{\angle A_1B_{n+1}B_n}{3}.$$

4) Coincide con el Problema 8 del Nivel I.

5) Coloca los números del 1 al 8 en las caras del octaedro regular, de manera que se cumpla la siguiente condición: si en cada vértice del octaedro se escribe el producto de los números que están en las 4 caras que lo tocan, entonces la suma de cada pareja de números escritos en vértices opuestos es la misma.



6) Sea $ABCD$ un cuadrilátero con sus vértices sobre una circunferencia $\mathcal{C}$ y tal que $AB > AD$. Sea E un punto sobre el lado AB tal que $BE = AD$. Sea P un punto sobre la circunferencia $\mathcal{C}$ con $AP = PE$. Muestra que $\angle DCP = \angle PCB$.

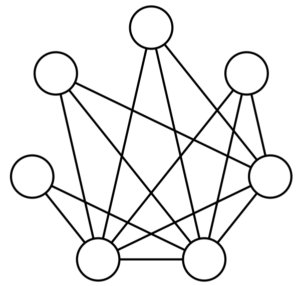


7) Para cada entero positivo n, considera los enteros positivos a y b tales que: a y b no tiene divisores positivos en común diferentes de 1, $ab = n$ y $a + b$ es mínimo (esto último quiere decir que si $n = ab = cd$, entonces $a + b \leq c + d$.) Definimos $f(n) = |s(a) - s(b)|$ donde $s(j)$ representa la suma de los dígitos de j. Calcula la suma $f(1^2 + 1) + f(2^2 + 2) + \cdots + f(2017^2 + 2017)$.

8) Juan escribe un número, entre 1 y 1000 (inclusive). Él reta a su hermano Mario a adivinar qué número escribió. En cada paso, Mario puede hacer preguntas a Juan de la siguiente forma: ¿El número que escribiste es **igual**, **mayor** o **menor** a x?, donde x es cualquier número entre 1 y 1000 que Mario puede escoger en cada paso. Juan deberá responder esta pregunta con la verdad. Mario gana cuando Juan le responde que el número que escribió es **igual** al número x por el cual preguntó Mario. Encuentra una estrategia en la cual Mario tarde a lo más 9 preguntas en ganar, independientemente de qué número escriba Juan.

Prueba por equipos. Nivel III.

1) Coloca los números del 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dentro de los círculos de la siguiente figura, de manera que si dos círculos están conectados con un segmento los números en esos círculos no tienen divisores en común distintos de 1.



2) Encuentra todas las ternas de enteros positivos (x, y, z) tales que

$$x^3 + 3x^2 + z^2 + 2x + 3y = 2018.$$

3) Coincide con el Problema 3 del Nivel II.

4) Coincide con el Problema 6 del Nivel II.

5) Coincide con el Problema 7 del Nivel II.

6) Sea P un punto en el plano. Se dibujan n circunferencias de radio 1 tales que P es un punto común a ellas. Encuentra el máximo n de tal manera que no suceda que el centro de alguna de las circunferencias quede en el interior o en el borde de otra de las circunferencias.

7) Para cada entero positivo n que no termine en cero, sea n^* el resultado de escribir los dígitos de n en orden inverso. Por ejemplo $2017^* = 7102$. Sea a un entero positivo de menos de 8 dígitos tal que a^* es distinto de a y denotemos por D al máximo común divisor de los números a y a^*. Se sabe que D es mayor a 2017 y lo dividen al menos tres primos distintos. Halla un valor posible de a.

8) Un entero positivo n es *bueno* si el exponente del 13 en la factorización de primos de n! es distinto de cero y divisible por 13. Encuentra todos los enteros positivos n que sean *buenos* pero que ningún número menor a $n - 13$ lo sea.

Soluciones de la prueba individual. Nivel I.

1) La respuesta es 5.
Igualando las sumas de los números en los hexágonos:

$$a + b + c + 9 + 2 + 0 = b + c + 1 + 7 + 5 + 4$$

se obtiene $a = 6$ y como se deben usar todos los dígitos, tenemos que b y c son 3 y 8 en algún orden. Por lo tanto, $b + c - a = 3 + 8 - 6 = 5$.

2) La respuesta es 24.
Como $e+1 = 7$, entonces $e = 6$. Luego, como $m+3 = 1$, necesitamos que $m = 8$. Esta última operación, nos acarrea 1 para la suma de los dígitos de las centenas, por

lo cual $m+b+1$ debe dar como resultado 0. Como m vale 8, entonces b debe valer 1. Finalmente esta última suma acarrea un 1 a los millares, por lo tanto $o+1=2$ y $o=1$. Así, $o+m+m+e+b=1+8+8+6+1=24$.

3) La respuesta es $\frac{171}{256}$.
Durante los primeros 4 días, Víctor y Vicky, juntos se comieron

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right)+\left(\frac{1}{128}+\frac{1}{256}\right)=1-\frac{1}{256}.$$

Por lo tanto, en el día 5 Víctor comió $1/256$ de pastel. Así, durante los 5 días, Víctor comió $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}=\frac{128+32+8+2+1}{256}=\frac{171}{256}$ del pastel.

4) La respuesta es 31.
Contemos las sublistas que no contienen a 2, 3, 5 o 7. Estas se conforman con los restantes 5 dígitos, y por tanto tenemos 2^5 de ellas. El total de sublistas es $2^5-1=31$, ya que el conjunto vacío no genera ninguna sublista.

5) La respuesta es 13.
Sean $x=BC=GH=CD/2$ y $y=HA=AB=DE=EF$. Así, el perímetro total de la figura es $6x+4y$. Por otro lado, $2x+3y=8$ y $8x+2y=10$. Por lo tanto, la respuesta es $2x+3y+\frac{8x+2y}{2}=8+5=13$.

6) La respuesta es 15.
Como $\frac{268}{187}=1+\frac{81}{187}=1+\frac{1}{\frac{187}{81}}$, se tiene que $a=1$ y $b+\frac{1}{c+\frac{1}{d+\frac{1}{e+1}}}=\frac{187}{81}=2+\frac{25}{81}$, por lo que $b=2$ y $c+\frac{1}{d+\frac{1}{e+1}}=\frac{81}{25}=3+\frac{6}{25}$. Luego, $c=3$ y $d+\frac{1}{e+1}=\frac{25}{6}=4+\frac{1}{6}$, por lo que $d=4$ y $e=5$. Así, $a+b+c+d+e=1+2+3+4+5=15$.

7) La respuesta es 426.
Sea x el número de cifras eliminadas. Como a cada hoja arrancada le corresponden dos páginas, una terminada en cifra 7 y la otra en cifra 8, se eliminan $x/2$ cifras con las páginas terminadas en 8. Analicemos las páginas con numeración terminada en cifra 8, para encontrar la última hoja arrancada:

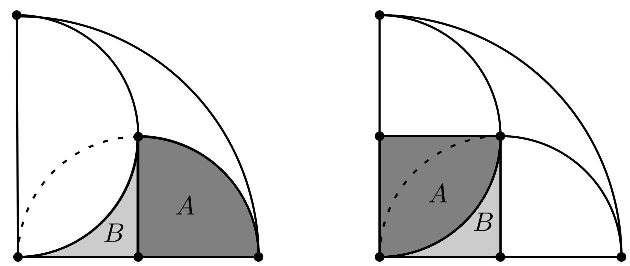
$$8, 18, 28, 38, \ldots, 98; 108, 118, 128, 138, \ldots, 198; 208, 218, \ldots, 998.$$

Vemos que hasta el 98, inclusive, se han eliminado 19 cifras, así que las restantes $\frac{x}{2}-19$ cifras se eliminarán de 3 en 3, es decir, el número de hojas que faltan por arrancar es la tercera parte de $\frac{x}{2}-19$, siempre y cuando $\frac{x}{2}-19\leq 270=30\times 9$, antes de empezar con la hoja donde está el 1008. Luego, la última hoja que se arranca está numerada con N y $\frac{N-108}{10}+1=\frac{\frac{x}{2}-19}{3}$, esto es, $N=\frac{5}{3}(x-38)+98$. Así que el máximo número de páginas del libro es $N+8=\frac{5}{3}(x-38)+106$. Para el caso $x=230$, $N=418$ y el máximo número de páginas es $N+8=426$.

8) La respuesta es $27°$.
Notemos que $\angle BAG=90°$ y $\angle BAE=180°\times\frac{3}{5}=108°$. Por lo tanto, $\angle EAG=18°$. Además, $GA=AB=AE$ y, por lo tanto, el triángulo EAG es isósceles. Así, $\angle GEA=\frac{(180°-18°)}{2}=81°$ y $\angle GED=108°-81°=27°$.

9) La respuesta es 2017.
Notemos que el número es $10^{2\times 2018} + 2 \times 10^{2018} + 1 = (10^{2018} + 1)^2$. Su raíz cuadrada es $10^{2018} + 1$ que tiene 2017 ceros.

10) La respuesta es 8.
Observemos las siguientes figuras.



La región B tiene un área igual a $1 - \frac{\pi}{4}$, en tanto que la región A tiene un área igual a $\frac{\pi}{4}$. Así, la región sombreada tiene un área igual a $2(A + B) = 2$. Por lo tanto, el área de toda la figura es $4 \times 2 = 8$.

11) La respuesta es 18.
Podemos hacer una tabla para llegar al resultado. Si cada uno hubiera recortado 15 círculos, tendríamos lo siguiente:

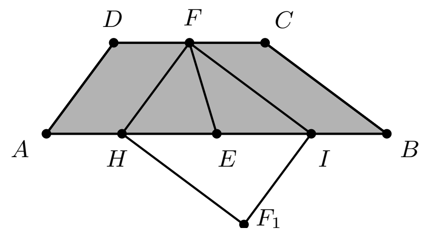
Círculos de María	Círculos de Pedro	Piezas de María	Piezas de Pedro
15	15	120	90

Si continuamos la tabla podremos llegar al resultado

Círculos de María	Círculos de Pedro	Piezas de María	Piezas de Pedro
15	15	120	90
16	14	128	84
17	13	136	78
18	12	144	72

y podemos ver que María recortó 18 círculos.

12) La respuesta es 5.
Sea $ABCD$ el trapecio con $AB = 18$, $CD = 8$, $DA = 6$ y $BC = 8$. Si E y F son los puntos medios de las bases AB y CD respectivamente, hay que calcular la longitud de EF. Trazando FH y FI, paralelas a DA y BC se forman dos paralelogramos.



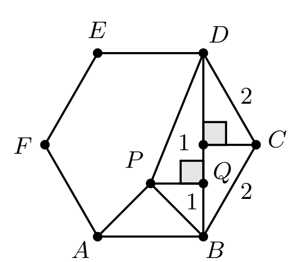
Luego, $AH = DF = 4 = FC = IB$, de donde $HI = 18-8 = 10$, $FH = DA = 6$ y $FI = BC = 8$.
Observemos que HFI es un triángulo rectángulo, ya que $FH^2 + FI^2 = HI^2$. Como E es el punto medio de la hipotenusa, entonces $FE = HE = EI = 5$.

Otra posible solución considera la ley del paralelogramo: si prolongamos la mediana hasta F_1, donde $FE = EF_1$, obtenemos el paralelogramo FHF_1I y, por lo tanto, $FF_1{}^2 + HI^2 = 2FH^2 + 2FI^2$, esto es, $FF_1{}^2 = 2FH^2 + 2FI^2 - HI^2 = 72 + 128 - 100 = 100$, de donde $FE = \frac{FF_1}{2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5$.

13) La respuesta es 2.
Sea n un número de dos dígitos tal que $3 \times n = aaa = 111 \times a = 3 \times 37 \times a$, para algún dígito $a \neq 0$. Podemos notar que lo anterior es equivalente a tener que $n = 37 \times a$ pero como n es un número de dos dígitos, a solo puede ser 1 o 2 y por ende n puede tener únicamente dos valores. Así, el resultado es 2.

14) La respuesta es 12.
Si $abcde$ es un número de cinco dígitos que cumple lo anterior debemos tener que $b = \frac{a+c}{2}$, $d = \frac{c+e}{2}$, $c = \frac{b+d}{2}$, lo que implica que a, c y e deben tener la misma paridad. Sustituyendo b y d en $c = \frac{b+d}{2}$, obtenemos que $c = \frac{a+2c+e}{4}$ y, por lo tanto, $c = \frac{a+e}{2}$. Ahora notemos que al encontrar a, e distintos con las propiedades anteriores obtendremos un número del tipo buscado pues es fácil ver que como a, e son distintos, entonces los números a, e, $c = \frac{b+d}{2}$, $b = \frac{a+c}{2}$, $d = \frac{c+e}{2}$ son distintos. Si a, e son pares, las únicas parejas que cumplen con las propiedades anteriores son $(2,6)$, $(4,8)$ y sus permutaciones. Si a, e son impares las parejas buscadas son $(1,5)$, $(1,9)$, $(3,7)$, $(5,9)$ y sus permutaciones. Entonces, hay $6 \times 2 = 12$ números que cumplen las condiciones.

15) La respuesta es $2(7 - 2\sqrt{3})$.
Como $DC = BC = 2$ y $\angle DCB = 120°$ tenemos por el teorema de Pitágoras que $DB = 2\sqrt{3}$. Sea Q el pie de la altura de P a DB, entonces BQ es igual a la altura desde P a AB.



Dado que el triángulo APB es rectángulo e isósceles, dicha altura mide 1 y, por lo tanto, $QB = 1$. Esto implica que $DQ = 2\sqrt{3} - 1$ y de nuevo por el teorema de Pitágoras $DP^2 = 1 + (2\sqrt{3} - 1)^2 = 2(7 - 2\sqrt{3})$.

Soluciones de la prueba individual. Nivel II. Parte A.

1) Ver la solución del Problema 3 del Nivel I.

2) Ver la solución del Problema 4 del Nivel I.

3) La respuesta es $36°$.
Notemos que $\angle IAB = \frac{180° \times 3}{5} = 108°$ y $\angle FAB = \frac{180° \times 4}{6} = 120°$. Por lo tanto, $\angle FAI = 12°$. Además, $IA = AB = AF$ y así, el triángulo FAI es isósceles. Luego, $\angle IFA = \frac{180° - 12°}{2} = 84°$ y $\angle IFE = 120° - 84° = 36°$.

4) Ver la solución del Problema 13 del Nivel I.

5) La respuesta es $\frac{1}{24}$.
Notemos primero que dicho producto debe ser un número primo y solo puede ser 2, 3 o 5. Sea p alguno de estos primos, luego en los otros dos tiros se debió obtener un 1 y lo que varía es en cuál tiro salió el primo p, por lo que para cada primo tenemos 3 opciones: $p \times 1 \times 1$, $1 \times p \times 1$ y $1 \times 1 \times p$. Como hay 3 primos válidos, entonces la cantidad de tiros "favorables" son $3 \times 3 = 9$, de un total de $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ resultados posibles. Luego la respuesta es $\frac{9}{216} = \frac{1}{24}$.

6) Ver la solución del Problema 15 del Nivel I.

7) La respuesta es $2017 \times 1009 = 2,035,153$.
Notemos que para obtener x^{2016} como término en la multiplicación de binomios, debemos elegir a la x en 2016 de los binomios multiplicados y uno de los números de exactamente un paréntesis. Entonces, cada uno de los números en los paréntesis aparecerá exactamente una vez multiplicando al término x^{2016}, es decir,

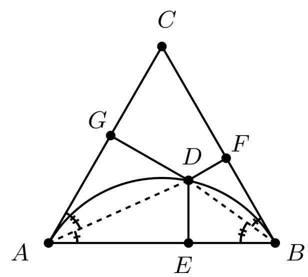
$$1x^{2016} + 2x^{2016} + 3x^{2016} + \cdots + 2017x^{2016} = (1 + 2 + 3 + \cdots + 2017)x^{2016},$$

por lo tanto el coeficiente de x^{2016} es equivalente a la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 2017$. Usando la fórmula de Gauss, la suma es igual a $1 + 2 + 3 + \cdots + 2017 = 2017 \times 2018/2 = 2017 \times 1009$.

8) Ver la solución del Problema 14 del Nivel I.

9) La respuesta es 9.
Notemos que desde el 50 hasta el 59 hay 9 números de 2 cifras, que en total aportan 18 cifras. Así desde 50 hasta 99 hay 45 números de 2 cifras y en total se escriben 90 cifras. Además, desde el 100 hasta el 199 hay 81 números de 3 cifras, que en total aportan 243 cifras. Así desde el 100 hasta el 999 hay $8 \times 81 = 648$ números de tres cifras y en total se escriben 1944 cifras. Por tanto del 50 al 999 se escriben $90 + 1944 = 2034$ cifras. Para encontrar la cifra en la posición 2017, hay que regresar del 999 hacia atrás 17 cifras, ...**9**94995996997998999. Por lo tanto, la cifra 9 ocupa el lugar 2017.

10) La respuesta es 6 cm.
Los triángulos rectángulos AED y BFD son semejantes porque el ángulo semi-inscrito $\angle CBD$ es igual al ángulo inscrito $\angle BAD$. Entonces, $\frac{DE}{AD} = \frac{DF}{DB}$, de donde $DE = DF \times \frac{AD}{DB}$. De manera análoga, los triángulos BED y AGD son semejantes. Luego, $\frac{DE}{DB} = \frac{GD}{AD}$, de donde $DE = GD \times \frac{DB}{AD}$.



Multiplicando estas relaciones vemos que DE es la media geométrica de DF y GD, esto es, $DE^2 = \left(DF \times \frac{AD}{DB}\right)\left(GD \times \frac{DB}{AD}\right) = (DF)(GD) = 4 \times 9 = 36$.

11) La respuesta es 333.
Sean $A = 111444444$, $B = 444111111$ y $x = 333$. Podemos notar que $A = 334668x$ y $B = 1333667x$ por lo que el máximo común divisor de A y B es múltiplo de x. Además $d = \text{mcd}(334668, 1333667)$ debe dividir a $4 \times 334668 - 1333667 = 5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$ pero 1333667 no es múltiplo de 5, 7, 11 o 13 por lo que 5005 es primo relativo con 1333667 y así $d = 1$. Por tanto, $\text{mcd}(A, B) = x = 333$.

12) La respuesta es 45.
Como $x \geq 1$, entonces $x^3 = 2017x + 360$ implica que $x^3 \geq 2017 + 360 = 2377$. Esto a su vez implica que $x \geq 14$ ya que $13^3 = 2197$. Por otro lado, $x^2 = 2017 + \frac{360}{x}$ de modo que

$$44^2 = 1936 < 2017 \leq x^2 \leq 2017 + \frac{360}{14} < 2017 + 26 = 2043 < 46^2 = 2116.$$

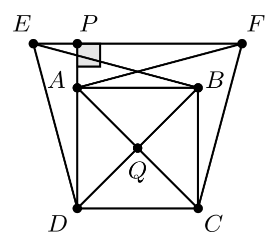
La única opción que le queda es $x = 45$. Luego comprobamos $45^3 - 2017(45) - 360 = 45(45^2 - 2017) - 360 = 45(2025 - 2017) - 360 = 45(8) - 360 = 0$. Por lo tanto, concluimos que $x = 45$ es la única solución entera positiva para esta ecuación.

Soluciones de la prueba individual. Nivel II. Parte B.

1) Como $100 = 2^2 \times 5^2$, la cantidad de primos relativos con 100 es $100 - 50 - 20 + 10 = 40$. Ahora notemos que si $1 \leq n \leq 50$ es primo relativo con 100, entonces $100 - n$ también lo es. Según el argumento anterior podemos agrupar los primos relativos en parejas $(n, 100 - n)$ tales que cada pareja suma 100 y, como 50 no es primo relativo con 100, entonces podemos dividir los números de forma exacta en $\frac{40}{2} = 20$ parejas. Por lo tanto, la respuesta es $20 \times 100 = 2000$.

2) Notemos que los números menores a 10^4 tienen a lo más 4 dígitos. Si los dígitos no se repiten, tenemos $9+9\times9+9\times9\times8+9\times9\times8\times7=9+81+648+4536=5274$ números balanceados. Si un dígito se repite, entonces todos los dígitos se repiten (de otra forma no sería balanceado). En el caso en que cada dígito está dos veces y ninguno es cero, tenemos $\binom{9}{2}$ formas de escoger los dígitos y $\binom{4}{2}$ formas de acomodarlos (si nuestro número es de 4 dígitos). Por otro lado, si consideramos las parejas de dígitos que contienen al cero, estas son 9 y hay solo 3 opciones para acomodar las parejas, dado que el 0 no puede ir al principio del número. Por tanto en este caso hay $\binom{9}{2}\binom{4}{2}+9\times3=216+17=243$. Si nuestro número es de dos dígitos tenemos solamente 9 opciones. Por tanto en este caso tenemos $243+9=252$ números. Si los números se repiten 3 o 4 veces tenemos $9\times2=18$ números, pues para cada uno de los 2 casos se tienen 9 posibilidades. Por tanto, en total contamos $5274+252+18=5544$ números balanceados.

3) Sean P el punto de intersección de AD con EF y Q el centro del cuadrado.



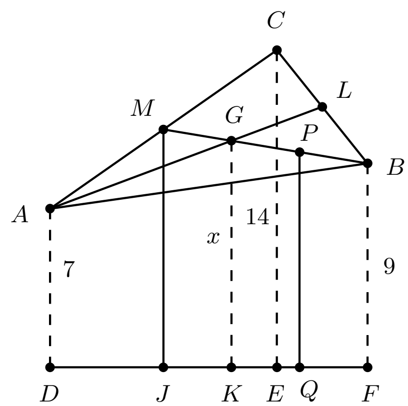
Notemos que $[DCFE]=\frac{PD(DC+FE)}{2}$ y $[ABFE]=\frac{PA(AB+FE)}{2}=\frac{PA(DC+FE)}{2}$. Entonces, $\frac{[DCFE]}{[ABFE]}=\frac{PD(DC+FE)}{PA(DC+FE)}=\frac{PD}{PA}$. Es fácil ver que C, A y E son colineales al igual que D, B y F. Además, por simetría tenemos que AB es paralela a EF. Por lo tanto $\angle DPF=\angle DAB=90°$ y $\angle DBA=\angle DFP=45°$. Así $PD=PF$ y $2PD^2=PD^2+PF^2=DF^2$. Por lo tanto, $PD=\frac{DF}{\sqrt{2}}$. Como el triángulo AFC es equilátero y $AC=2$, tenemos que $FQ=\sqrt{3}$ y por lo tanto $DF=1+\sqrt{3}$, $PD=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}$ y $PA=PD-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$. Entonces, $\frac{[DCFE]}{[ABFE]}=\frac{PD}{PA}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$.

Soluciones de la prueba individual. Nivel III. Parte A.

1) La respuesta es $\frac{1}{9}$.
La descomposición en primos de 10! es 2^8 es $2^8\times3^4\times5^2\times7$. Los divisores impares de 10! deben ser entonces divisores de $3^4\times5^2\times7$. Como hay $5\times3\times2=30$ de estos divisores, la probabilidad buscada es $30/270=1/9$.

2) La respuesta es 10.
Sean D, F, E, K las proyecciones respectivas de A, B, C, G sobre la recta. Los segmentos DA, EC y FB son paralelos, formando varios trapecios. El baricentro G es el punto de intersección de las medianas AL y BM, así que la distancia que

se busca es $GK = x$. Sea P el punto medio de GB y sean J y Q las proyecciones de M y P sobre la recta. Entonces, x será la línea media del trapecio $MJQP$, $x = \frac{MJ+QP}{2}$.



Notemos que MJ es la línea media del trapecio $ADEC$, entonces $MJ = \frac{7+14}{2} = \frac{21}{2}$. Análogamente, QP es la línea media del trapecio $GKFB$ ya que $GB = 2GM$. Entonces $PQ = \frac{9+x}{2}$. Sustituyendo, obtenemos la ecuación $x = \frac{\frac{21}{2}+\frac{9+x}{2}}{2} = \frac{30+x}{4}$ cuya solución es $x = 10$.

3) Ver la solución del Problema 9 del Nivel II.

4) Ver la solución del Problema 11 del Nivel II.

5) Ver la solución del Problema 5 del Nivel II.

6) Ver la solución del Problema 7 del Nivel II.

7) Ver la solución del Problema 10 del Nivel II.

8) Ver la solución del Problema 12 del Nivel II.

9) La respuesta es $\frac{2017\times 1009}{2}$.
Para cada $1 \leq k \leq 2017$, un subconjunto $\mathcal{A}$ que contiene a k se puede expresar de la forma $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \{k\}$ donde $\mathcal{B}$ es un subconjunto que no contiene a k. Como hay 2^{2016} subconjuntos $\mathcal{B}$, entonces el número k aparecece 2^{2016} veces como sumando en $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. Así, la suma de todos los conjuntos $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ es igual a

$$2^{2016}(1+2+3+\cdots+2017) = \frac{2^{2016}\times 2017\times 2018}{2} = 2^{2015}\times 2017\times 2018.$$

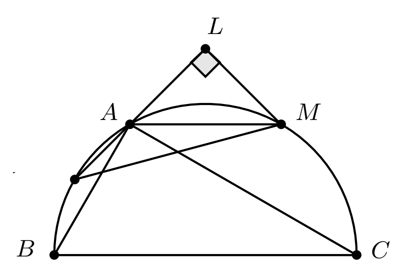
Dado que hay en total 2^{2017} subconjuntos, la probabilidad buscada es $\frac{2^{2015}(2017)(2018)}{2^{2017}} = \frac{2017\times 1009}{2}$.

10) La respuesta es $144, 169, 441, 961, 121, 484, 676, 100, 400, 900$.
Sean $x^2 = abc$, $y^2 = cba$. Entonces, tenemos que $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 99(a-c)$. En consecuencia, si $x \neq y$, 99 divide al producto $(x+y)(x-y)$. Como los cuadrados deben ser números de tres cifras y $31^2 = 961$, entonces tenemos que $10 \leq x, y \leq 31$. Entonces $21 \leq x+y \leq 61$ y $1 \leq x-y \leq 21$. Por tanto tenemos dos casos: *(1)* $x+y = 27, 36, 45, 54$ y $x-y = 11$, *(2)* $x+y = 33, 44, 55$ y $x-y = 9, 18$. El caso *(1)* no arroja soluciones, en tanto que el caso *(2)* nos da $x^2 = 21^2 = 441$ y $x^2 = 31^2 = 961$. Por otro lado, si $x = y$ entonces $a = b$ y tenemos las soluciones $x^2 = 11^2 = 121$, $x^2 = 22^2 = 484$ y $x^2 = 26^2 = 676$. Finalmente, si un número a ponerlo al revés no tiene 3 cifras entonces el número original termina en 0, así que es divisible entre 10 y por tanto entre 100. Aquí las soluciones son $x^2 = 10^2 = 100$, $x^2 = 20^2 = 400$ y $x^2 = 30^2 = 900$.

11) La respuesta es 462^3.
Para minimizar el producto de los boletos, basta considerar los 6 números más pequeños que cumplan las condiciones del problema, lo cual implica que dichos números deberán estar formados por parejas de los 4 números primos más pequeños, sin contar al 5 (ya que $\binom{4}{2} = 6$). Así los números se formarán tomando parejas del conjunto $\{2, 3, 7, 11\}$, por lo que el producto de ellos será $2^3 \times 3^3 \times 7^3 \times 11^3 = 462^3$. El siguiente arreglo muestra una posible disposición de los números.

Pasajero	Boleto
1	$2 \times 7 = 14$
2	$3 \times 11 = 33$
3	$2 \times 3 = 6$
4	$7 \times 11 = 77$
5	$2 \times 11 = 22$
6	$3 \times 7 = 21$

12) La respuesta es $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.
Considera L el pie de la altura desde M sobre AN.



Como N y M son puntos medios de los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$, entonces $\angle MNA = 30^\circ$ y $\angle AMN = 15^\circ$. Por lo tanto, el triángulo MNL es rectángulo de $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ y el triángulo LAM es rectángulo isósceles. Por otro lado, $\angle MCA = 30^\circ = \angle ACB$.

Así, $AB = AM = 1$, entonces el triángulo LAM tiene hipotenusa 1, lo cual implica que $LM = 1/\sqrt{2}$. Luego, $LN = \sqrt{3}/\sqrt{2}$ y

$$[ANM] = [LMN] - [LAM] = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Soluciones de la prueba individual. Nivel III. Parte B.

1) Ver la solución del Problema 3 del Nivel II.

2) Supongamos que los tres números son primos. Si uno de ellos fuera par, digamos $a = 2$, entonces b y c son impares, luego $b + c + bc$ es impar, y no es posible que $a \mid b + c + bc$, por lo que ninguno de los números puede ser par. Como $a \mid (a+1)(b+1)(c+1)-1$, $b \mid (a+1)(b+1)(c+1)-1$, $c \mid (a+1)(b+1)(c+1)-1$ y a, b, c son primos, entonces $abc \mid (a+1)(b+1)(c+1)-1$. Sin embargo,

$$1 < \frac{(a+1)(b+1)(c+1)-1}{abc} < \frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc} = \frac{a+1}{a} \cdot \frac{b+1}{b} \cdot \frac{c+1}{c}$$
$$\leq \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{7} < 2,$$

por lo que abc no divide a $(a+1)(b+1)(c+1)-1$, lo cual es una contradicción. Luego, alguno de los números a, b, c no puede ser primo.

3) Supóngase que M tiene más de 3 divisores primos, entonces, tendría cuando menos $2 \times 2 \times 2 = 8$ divisores, una contradicción, por lo que M debe tener a lo mucho dos divisores primos, y siendo este el caso es fácil ver que M es de una de las siguientes formas p^5 o p^2q.

Caso (1): $M = p^5$. En este caso la suma de los divisores de M es $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 3500$: Si $p \leq 5$ entonces el lado izquierdo es mayor que el lado derecho, si $p = 2, 3$ tampoco se da la igualdad, por lo que no hay soluciones en este caso.

Caso (2): $M = p^2q$. En este caso los divisores son $1, p, p^2, q, pq, p^2q$ y su suma puede ser escrita como: $(p^2+p+1)(q+1) = 3500 = 2^2 \times 5^3 \times 7$. Pero p^2+p+1 es siempre impar, luego $q+1$ debe ser par y q es impar. Supóngase que $q+1 = 4k$ entonces tenemos que $k(p^2 + p + 1) = 5^3 \times 7$. Analizando las congruencias módulo 5, notamos que $p^2 + p + 1$ no puede ser múltiplo de 5, luego debe ser 1 o 7, resolviendo estos dos casos, concluimos que el único valor válido para p es $p = 2$, por lo que $k = 125$ y $q = 4 \times 125 - 1 = 499$ que es también primo. Luego el único valor posible para M es $22 \times 499 = 1996$.

Soluciones de la prueba por equipos. Nivel I.

1) Consideremos el pensamiento de Toño. Como Toño puede pagar con 3 monedas y que le regresen cambio, entonces a lo más, la cantidad que tiene que pagar es 30. Ahora, podrían regresarle el cambio con 2 monedas, por lo tanto la diferencia con

esas 3 monedas que pagó es al menos 2 pesos. Por lo tanto la cantidad a lo más es 28 pesos. Si paga con 3 monedas ninguna de ellas puede ser de 1 o 2 pesos porque la cantidad que le regresarían es al menos 2 pesos, volviendo innecesaria la moneda de 1 o 2 pesos. Por lo tanto en el primer pensamiento de Toño, pagó sólo con monedas de 10 y 5 pesos. Analizemos primero el caso donde se usan 3 monedas de 10 pesos. El cambio puede darse usando a lo más una moneda de 5 pesos (si se usan dos se vuelve innecesaria una de 10 pesos). Si se utiliza, el cambio será 6 o 7 pesos y la cantidad a pagar sería 24 o 23 pesos. Si no se utiliza, el cambio será 2, 3 o 4 pesos, y la cantidad a pagar sería 28, 27 o 26 pesos. Si se usa al menos una moneda de 5 pesos, en el cambio sólo podrán utilizarse monedas de 1 y 2 pesos, pues de lo contrario la moneda de 5 pesos se volvería innecesaria, en este caso el cambio se dará sólo con monedas de 1 o 2 pesos y deberá ser 2, 3 o 4 pesos. Tres monedas de 5 pesos: La cantidad a pagar sería 13, 12 u 11 pesos. Dos monedas de 5 pesos y una de 10 pesos: La cantidad a pagar sería 18, 17 o 16. Una moneda de 5 pesos y dos de 10 pesos: La cantidad sería 23, 22 o 21 pesos.

2) Como empieza en el 6, después de 2 saltos debería llegar al 16 que es potencia de 2, por lo tanto regresa al 14. Notemos que va saltando de par a impar y viceversa siempre que no caiga en una potencia de 2, pero cada dos saltos es que va de par en par con diferencia de 10. Entonces, la siguiente potencia de 2 en la que caerá es la siguiente cuya cifra de las unidades sea igual a 4, es decir, el 64, al cual llega después de $\frac{64-14}{5} = 10$ saltos. En este punto regresa al vértice 62 y no volverá a caer en una potencia de 2 hasta la siguiente que termine en 2, es decir la 512 a la cual llega después de $\frac{512-62}{5} = 90$ saltos. Aquí regresará al vértice 510 y no caeŕa en potencia de 2 de nuevo en esta vuelta porque no hay potencias de 2 que terminen en 0. Por lo tanto, la primera vez que supere el 1, es cuando salte desde el 2015, es decir con $\frac{2020-510}{5} = 302$ saltos más. Por lo tanto, la pulga necesitó de $2 + 10 + 90 + 302 = 404$ saltos.

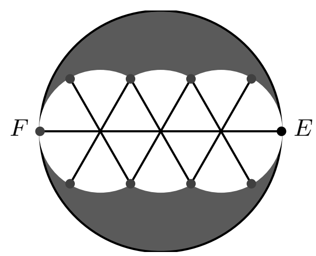
3) La sucesión $3, 5, 7 \ldots$ corresponde a la de los números impares a partir del 3, es decir, $\{2n+1 \mid n = 1, 2, 3 \ldots\}$. Ahora veamos cómo localizamos el número que cierra cada cuadrado, para pasar del primer cuadrado le añadimos 3 cuadrados, del segundo al tercero le añadimos 5 cuadrados, así los términos de la sucesión van quedando agrupados según se van añadiendo de la siguiente manera: $\{3\}, \{5, 7, 9\}\{11, 13, 15, 17, 19\}, \ldots$, donde el término que cierra el k-ésimo cuadrado es $2(1+3+5+\cdots+(2k-1))+1 = 2(k^2)+1$. Entonces, el número que cierra el $18°$ cuadrado es $2(18^2)+1 = 2(324)+1 = 649$.

4) Si Edgar está en el carril 1, entonces como Omar está en un extremo y ya está ocupado el 1, Omar está en el 5. Como Beto no nada al lado de Edgar, entonces debe estar en algún carril de 3 o 4, pero si está en el 3 forzosamente nadaría al lado de Mario (pues los únicos carriles libres serían el 2 y 4), entonces Beto estaría en el 4, lo cual obliga a que Miguel y Mario naden juntos, pero eso no ocurre. En conclusión si Edgar estuviera en el carril 1 forzaría una configuración que no cumple las cuatro afirmaciones. Por lo anterior Edgar debe estar en el 4, lo cual obliga a que Beto este en el carril 1 o 2. En este caso si Beto está en el carril 1, Omar estaría en el 5 lo cual fuerza que Mario y Miguel naden juntos lo cual no

ocurre. Luego Beto debe estar en el carril 2, esto fuerza a que Mario esté en el carril 5, Omar en el 1 y Miguel en el 3, la cual es una configuración forzada que cumple las condiciones, por lo tanto esta es la única configuración posible.

5) Consideremos un punto P en alguna de las intersecciones de las rectas y veamos cuántos triángulos tienen a P como vértice. Como hay a lo más $\binom{6}{2} = 15$ intersecciones y cada una de las 6 rectas tienen 5 puntos de intersección, nos quedan $15 - 9 = 6$ puntos que pueden ser otro de los vértices del triángulo. Una vez elegido uno de esos 6 puntos, las dos rectas que pasan por él intersecan a las otras dos rectas que teníamos, lo cual nos dice que nos queda un único punto para elegir que sea vértice del triángulo. Por lo tanto, para cada vértice tenemos 6 triángulos que cumplen las propiedades del problema. Como hay 15 vértices posibles y cada triángulo tiene 3 vértices, concluimos que hay $\frac{6\times 15}{3} = 30$ triángulos de los que se querían contar.

6) Dividamos la figura de la siguiente manera:



El área de la circunferencia mayor es 4π. El área de cada círculo blanco original es π. La figura blanca está formada por $\frac{10}{6}$ de círculo blanco y cuatro triángulos equiláteros. Cada triángulo tiene un área de $\frac{\sqrt{3}}{4}$. El área sombreada es $4\pi - \frac{10\pi}{6} - 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3}$.

7) Sean $A = abcd$ y $N = pqrs$ dos enteros que se escriben con las mismas cifras. Según las condiciones del problema tenemos que $A = 3N$, con lo cual tenemos que $a+b+c+d = p+q+r+s$ es un múltiplo de 3. En consecuencia, N también es un múltiplo de 3, digamos $N = 3T$, y por tanto $A = 9T$. Así, concluímos que $a+b+c+d = p+q+r+s$ es un múltiplo de 9. Como A es un número de 4 cifras, tenemos que $A \leq 9999$. Entonces tenemos que $N \leq 3333$. Como ninguna de las cifras puede ser 2 o 4, podemos concluir que solamente existen dos casos: (1) $p = 3$ y (2) $p = 1$.

Caso (1): Si $p = 3$, entonces $a = 9$ y por tanto la suma de las restantes dos cifras debe dejar residuo 6 al dividirse entre 9. Además q no puede ser mayor a 4 ya que de lo contrario $A = 3N$ tendría 5 cifras. Entonces las únicas posibilidades para las restantes dos cifras son $\{0, 6\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 3\}$. Procedemos a analizar cada una de estas opciones. Para $\{0, 6\}$ tenemos $2! = 2$ formas de acomodar las cifras: 3069, 3096. Lo mismo sucede para $\{1, 5\}$, con los números 3195 y 3159; y también en el caso $\{3, 3\}$ con las opciones 3339 y 3393. Como ninguno de estos números cumple la condición $A = 3N$, observamos que en este caso no hay solución.

Caso(2): Si $p = 1$ entonces $1000 \leq N \leq 1999$ y por tanto $3000 \leq A \leq 5997$. De aquí podemos concluir que hay dos casos: $a = 3$ o $a = 5$. En el primer caso, las dos cifras restantes al sumarse deben dejar residuo 5 al dividirse entre 9; en tanto que en el segundo caso el residuo de la suma deberá ser 3. Entonces surgen las siguientes opciones: para $a = 3$ tenemos $\{0, 5\}$, $\{5, 9\}$, $\{6, 8\}$ y $\{7, 7\}$; en tanto que para $a = 5$ tenemos $\{0, 3\}$, $\{3, 9\}$, $\{5, 7\}$ y $\{6, 6\}$. Analizando cada una de estas opciones como en el inciso anterior nos lleva a concluir que el único número que satisface las condiciones del problema es $N = 1305$.

8) Sea abc el número de tres dígitos tales que $a > b > c > 0$. Entonces $a + c$ debe ser número impar. Si $a+c < 10$, eso significa que el número de las decenas de la suma es $2b$, que es par, lo cual no es posible, por lo tanto $a + c > 10$. Si $2b + 1 > 10$, entonces el dígito de las decenas de la suma es $a + c + 1$, pero como $a + c$ debe ser impar, entonces $a + c + 1$ es par, por lo cual no es posible. Por lo tanto $2b + 1 \leq 9$, o sea $b \leq 4$. Si $b = 4$, entonces como $a + c$ es impar mayor que 10, las únicas soluciones en este caso son 942 y 843. Si $b = 3$, entonces como $a + c$ es impar mayor que 10, la única solucíon en este caso es 932. Si $b = 2$, entonces $c = 1$ y no existe un dígito a tal que $a + c$ sea impar mayor que 10. En resumen, las únicas soluciones son 932, 942 y 843.

Soluciones de la prueba por equipos. Nivel II.

1) Ver la solución del Problema 3 del Nivel I.

2) Ver la solución del Problema 4 del Nivel I.

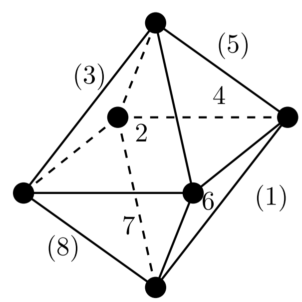
3) Por ser polígonos regulares tenemos que $\angle A_nA_1A_2 = 180° \times \frac{n-2}{n}$ y $B_{n+1}A_1A_2 = 180° \times \frac{n-1}{n+1}$. Luego, $\angle B_{n+1}A_1A_n = \angle B_{n+1}A_1A_2 - \angle A_nA_1A_2 = \frac{180°\times(n-1)}{n+1} - \frac{180°\times(n-2)}{n} = \frac{360°}{n(n+1)}$. Como $A_nA_1 = A_2A_1 = B_{n+1}B_1$, el triángulo $B_{n+1}A_1A_n$ es isósceles y, por lo tanto, $\angle A_1B_{n+1}A_n = \angle A_1A_nB_{n+1} = \frac{180° - \angle A_nA_1B_{n+1}}{2} = \frac{180° - \frac{360°}{n(n+1)}}{2} = \frac{90°\times(n^2+n-2)}{n(n+1)}$. Luego, si n cumple lo pedido, entonces

$$\frac{90° \times (n^2 + n - 2)}{n(n+1)} = \frac{2}{3} \times \angle A_1B_{n+1}B_n = \frac{2}{3} \times \frac{180° \times (n-1)}{n+1},$$

que es equivalente a que $n^2 - 7n + 6 = 0$. Luego, $n = 1$ o $n = 6$, de donde el único valor posible para n es 6.

4) Ver la solución del Problema 8 del Nivel I.

5) El siguiente acomodo funciona (note que los números entre paréntesis representan las caras que están por detrás):



6) Notemos primero que basta probar que $BP = PD$. Como subtienden el mismo arco, tenemos que $\angle ADP = \angle ABP$. Entonces, dado que los triángulos BEP y DAP son obtusángulos, podemos concluir que son congruentes. Luego, $BP = PD$.

7) Para cada n, como ab es fijo, $a+b$ es mínimo cuando $a-b$ lo es, pues $a+b$ mínimo si y solo si $(a+b)^2$ es mínimo, lo cual es cierto si y solo si $(a+b)^2-4ab$ es mínimo (puesto que ab es constante), esto es, si y solo si $a-b$ es mínimo. Ahora bien, para cada número de la forma n^2+n tenemos que los a, b que cumplen el enunciado son $a = n+1$ y $b = n$ pues son coprimos y $a-b = 1$ es mínimo. Entonces, $f(n^2+n) = s(n+1) - s(n)$. Así,

$$\begin{aligned} &f(1^2+1) + f(2^2+2) + \cdots + f(2017^2+2017) \\ =\ &s(2) - s(1) + s(3) - s(2) + s(4) - s(3) + \cdots + s(2018) - s(2017) \\ =\ &s(2018) - s(1) = 11 - 1 = 10. \end{aligned}$$

8) Una estrategia puede ser la siguiente. Sea k el número que Juan está pensando. Llamemos a y b a los números tales que Mario puede estar seguro que el número de Juan está entre a y b (inclusive), estos se irán actualizando según la información que vaya recabando Mario. Por ejemplo, inicialmente $a = 1$ y $b = 1000$. Sea m igual a $\frac{(a+b)}{2}$ o su parte entera en caso de que tenga decimal. Posteriormente, Mario puede hacer la pregunta ¿Es el número que estás pensando igual, mayor o menor a m? Si m es igual al número que está pensando Juan, entonces Mario ya ganó. Sino, hay dos opciones: si responde que **menor**, actualizaremos nuestra b para que sea igual a $m-1$, ya que sabíamos que $a \leq k \leq b$ y por la información de la respuesta sabemos que $k \leq m$ (notemos que como inicialmente $a \leq k \leq m$, siempre se cumplirá que $a \leq m \leq b$), por lo tanto, ahora sabremos que $a \leq k \leq m$, por lo cual ahora m será el número que sabemos es mayor o igual a k. Haciendo un razonamiento análogo, si Juan responde **mayor**, entonces podemos asignar a la nueva a para que sea igual a $m+1$.
Ahora bien, Mario estará seguro del número que está pensando Juan cuando $a = b$ (pues entonces $a \leq k \leq b = a$, y por lo tanto $k = a$). También notemos que después de cada pregunta, la distancia $(b-a)$ entre a y b, irá disminuyendo pues en caso de que la respuesta sea **mayor**, como $\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{a+b}{2}$, entonces $b-(m+1) \leq b - (\frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}) \leq \frac{b-a}{2} - 1$. Análogamente, si la respuesta es **menor**,

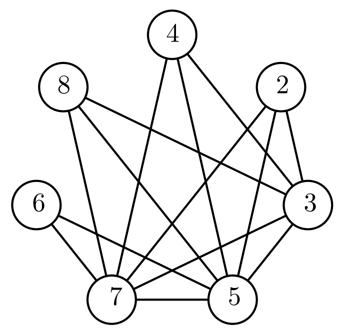
se concluye que $(m-1)-a \leq \frac{b-a}{2}$. Así pues, la nueva distancia entre a y b será a lo más $\frac{b-a}{2} - \frac{1}{2}$ en el siguiente paso.

Inicial	1	2	3	4	5	6	7	8	9
999	499	299	124	61	30	14	6	2	0

Por lo tanto, al cabo de 9 preguntas Mario puede saber cuál número estaba pensando Juan con esta estrategia.

Soluciones de la prueba por equipos. Nivel III.

1) El siguiente arreglo funciona:



2) Primero notemos que $x^3+3x^2+z^2+2x+3y = x(x+1)(x+2)+3y+z^2$, sin importar el valor de x. Como x, $x+1$, $x+2$ son tres enteros consecutivos, entonces uno de ellos es múltiplo de 3, por lo que $x(x+1)(x+2)+3y$ es múltiplo de 3, luego si existe una terna de enteros tal que $x^3+3x^2+z^2+2x+3y = 2018$, entonces z^2 deja residuo 2 al dividirse entre tres, algo imposible ya que los cuadrados dejan residuo 1 o 0 al dividirse entre tres, de lo anterior se concluye que no existen ternas como las pedidas.

3) Ver la solución del Problema 3 del Nivel II.

4) Ver la solución del Problema 6 del Nivel II.

5) Ver la solución del Problema 7 del Nivel II.

6) Supongamos que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son los círculos que buscamos de tal manera que O_i es el centro de C_i. Sea C el círculo con centro en P y radio 1. Es claro que $O_1, O_2, \ldots, O_n$ están al borde de C. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $O_1, O_2, \ldots, O_n$ forman un polígono convexo, es decir, que los centros están etiquetados en orden de manera que $\angle O_1PO_2+\angle O_2PO_3+\cdots+\angle O_nPO_1 = 360°$. Notemos que el hecho de que O_i no esté en el interior o en el borde de C_{i+1} y que el triángulo O_iPO_{i+1} sea isósceles implica que $\angle O_iPO_{i+1} > 60°$. Dadas las observaciones anteriores es fácil deducir que el máximo número de circunferencias es 5.

7) Como la única relación entre a y a^* son sus dígitos, aseguraremos que ambos sean divisibles por enteros de los que tenemos criterio de divisibilidad. Es claro que $99 \mid a$ si y solo si $99 \mid a^*$. De esta manera, $D = 99k > 2017$ con $k > 20$. Como buscamos que se pueda asegurar la divisibilidad con un criterio, comprobemos que $k = 25$. Tras varios intentos se llega a que a puede ser de la forma $52xy75$, con lo que aplicando los criterios de divisibilidad, $9 \mid x + y + 1$ y $11 \mid x - y + 5$. Para $x = 7$, $y = 1$ esto se cumple, ya que $a = 527175$ satisface.

8) Consideremos los números $x = 13^2$ y $w = 13^2 + 13 \times 12$. Si $n < x$, entonces $n!$ contiene a lo más 12 factores 13 y no puede ser bueno. Si $n = x$ entonces $n!$ contiene los primeros doce múltiplos de 13 (que tienen solo un factor 13) y 13^2 que tiene dos. El exponente de 13 en $(13^2)!$ es 14 y no es bueno. si $x < n < w$, entonces $n!$ contiene 14 factores de x y a lo más 11 factores extras pues los múltiplos de 13 entre x y w solo tienen factor 13, por lo tanto $n!$ tiene 14, $15 \ldots$ o 25 factores 13 y no es bueno. Si $n = 13^3 + 13 \times 12$, entonces $n!$ es bueno, pues tiene 26 factores 13. Ningún número de los que buscamos es mayor a $13^2 + 13 \times 12 + 13 = 2 \times 13^2$, pues $n = w$ es bueno. Notemos que si $n = w$, $w + 1, \ldots$,$w + 12$ entonces $n!$ tiene 26 factores 13 y es bueno, además $n - 13 < w$ y sabíamos que ningún número menor a w era bueno. Por lo tanto, los números son $w, w + 1, \ldots, w + 12$ con $w = 13^2 + 13 \times 122$.

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2018, No. 1

Concurso Nacional de la 1^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Educación Básica (Soluciones)

A continuación presentamos las soluciones de los problemas del concurso nacional de la 1^a OMMEB. Los enunciados de los problemas fueron publicados en el número 4 de Tzaloa 2017.

Soluciones de la prueba individual. Nivel I.

1) La respuesta es 5. Igualando las sumas de los números en los hexágonos, tenemos que $a+b+c+9+2+0=b+c+1+7+5+4$, de donde $a=6$ y, como se deben usar todos los dígitos, tenemos que b y c son 3 y 8 en algún orden. Por lo tanto, $b+c-a=3+8-6=5$.

2) La respuesta es 24. Como $e+1=7$, entonces $e=6$. Luego, como $m+3=1$, necesitamos que $m=8$. Esta última operación, nos acarrea 1 para la suma de los dígitos de las centenas, por lo cual $m+b+1$ debe dar como resultado 0. Como m vale 8, entonces b debe valer 1. Finalmente esta última suma acarrea un 1 a los millares, por lo tanto $o+1=2$ y $o=1$. Así, $o+m+m+e+b=1+8+8+6+1=24$.

3) La respuesta es $\frac{171}{256}$. Durante los primeros 4 días, Víctor y Vicky, juntos se comieron

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right)+\left(\frac{1}{128}+\frac{1}{256}\right)=1-\frac{1}{256}.$$

Por lo tanto, en el día 5 Víctor comió $1/256$ de pastel. Así, durante los 5 días, Víctor comió $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}=\frac{128+32+8+2+1}{256}=\frac{171}{256}$ del pastel.

4) La respuesta es 31. Contemos las sublistas que no contienen a 2, 3, 5 o 7. Estas se conforman con los restantes 5 dígitos, y por tanto tenemos 2^5 de ellas. El total de sublistas es $2^5 - 1 = 31$, ya que el conjunto vacío no genera ninguna sublista.

5) La respuesta es 13. Sean $x = BC = GH = CD/2$ y $y = HA = AB = DE = EF$. Así, el perímetro total de la figura es $6x + 4y$. Por otro lado, $2x + 3y = 8$ y $8x + 2y = 10$. Por lo tanto, la respuesta es $2x + 3y + \frac{8x+2y}{2} = 8 + 5 = 13$.

6) La respuesta es 15. Como $\frac{268}{187} = 1 + \frac{81}{187} = 1 + \frac{1}{\frac{187}{81}}$, se tiene que $a = 1$ y $b + \frac{1}{c+\frac{1}{d+\frac{1}{e+1}}} = \frac{187}{81} = 2 + \frac{25}{81}$, por lo que $b = 2$ y $c + \frac{1}{d+\frac{1}{e+1}} = \frac{81}{25} = 3 + \frac{6}{25}$. Luego, $c = 3$ y$d + \frac{1}{e+1} = \frac{25}{6} = 4 + \frac{1}{6}$, por lo que $d = 4$ y $e = 5$. Así, $a + b + c + d + e = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

7) La respuesta es 426. Sea x el número de cifras eliminadas. Como a cada hoja arrancada le corresponden dos páginas, una terminada en cifra 7 y la otra en cifra 8, se eliminan $x/2$ cifras con las páginas terminadas en 8. Analicemos las páginas con numeración terminada en cifra 8, para encontrar la última hoja arrancada:

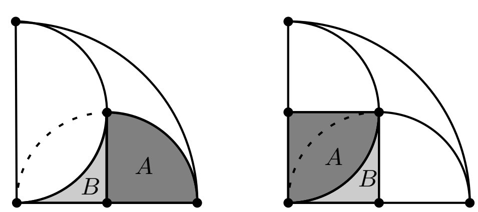
$$8, 18, 28, 38, \ldots, 98; 108, 118, 128, 138, \ldots, 198; 208, 218, \ldots, 998.$$

Vemos que hasta el 98, inclusive, se han eliminado 19 cifras, así que las restantes $\frac{x}{2} - 19$ cifras se eliminarán de 3 en 3, es decir, el número de hojas que faltan por arrancar es la tercera parte de $\frac{x}{2} - 19$, siempre y cuando $\frac{x}{2} - 19 \leq 270 = 30 \times 9$, antes de empezar con la hoja donde está el 1008. Luego, la última hoja que se arranca está numerada con N y $\frac{N-108}{10} + 1 = \frac{\frac{x}{2}-19}{3}$, esto es, $N = \frac{5}{3}(x - 38) + 98$. Así que el máximo número de páginas del libro es $N + 8 = \frac{5}{3}(x - 38) + 106$. Para el caso $x = 230$, $N = 418$ y el máximo número de páginas es $N + 8 = 426$.

8) La respuesta es $27°$. Notemos que $\angle BAG = 90°$ y $\angle BAE = 180° \times \frac{3}{5} = 108°$. Por lo tanto, $\angle EAG = 18°$. Además, $GA = AB = AE$ y, por lo tanto, el triángulo EAG es isósceles. Así, $\angle GEA = \frac{(180° - 18°)}{2} = 81°$ y $\angle GED = 108° - 81° = 27°$.

9) La respuesta es 2017. Notemos que el número es $10^{2\times 2018} + 2 \times 10^{2018} + 1 = (10^{2018} + 1)^2$. Su raíz cuadrada es $10^{2018} + 1$ que tiene 2017 ceros.

10) La respuesta es 8. Observemos las siguientes figuras.



La región B tiene un área igual a $1 - \frac{\pi}{4}$, en tanto que la región A tiene un área igual a $\frac{\pi}{4}$. Así, la región sombreada tiene un área igual a $2(A + B) = 2$. Por lo tanto, el área de toda la figura es $4 \times 2 = 8$.

11) La respuesta es 18. Podemos hacer una tabla para llegar al resultado. Si cada uno hubiera recortado 15 círculos, tendríamos lo siguiente:

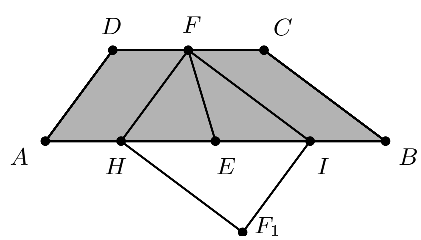
Círculos de María	Círculos de Pedro	Piezas de María	Piezas de Pedro
15	15	120	90

Si continuamos la tabla podremos llegar al resultado

Círculos de María	Círculos de Pedro	Piezas de María	Piezas de Pedro
15	15	120	90
16	14	128	84
17	13	136	78
18	12	144	72

y podemos ver que María recortó 18 círculos.

12) La respuesta es 5. Sea $ABCD$ el trapecio con $AB = 18$, $CD = 8$, $DA = 6$ y $BC = 8$. Si E y F son los puntos medios de las bases AB y CD respectivamente, hay que calcular la longitud de EF. Trazando FH y FI, paralelas a DA y BC se forman dos paralelogramos. Luego, $AH = DF = 4 = FC = IB$, de donde $HI = 18 - 8 = 10$, $FH = DA = 6$ y $FI = BC = 8$.
Observemos que HFI es un triángulo rectángulo, ya que $FH^2 + FI^2 = HI^2$. Como E es el punto medio de la hipotenusa, entonces $FE = HE = EI = 5$.



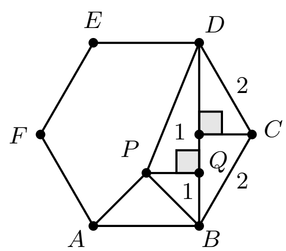
Otra posible solución considera la ley del paralelogramo: si prolongamos la mediana hasta F_1, donde $FE = EF_1$, obtenemos el paralelogramo FHF_1I y, por lo tanto, ${FF_1}^2 + HI^2 = 2FH^2 + 2FI^2$, esto es, ${FF_1}^2 = 2FH^2 + 2FI^2 - HI^2 = 72 + 128 - 100 = 100$, de donde $FE = \frac{FF_1}{2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5$.

13) La respuesta es 2. Sea n un número de dos dígitos tal que $3 \times n = aaa = 111 \times a = 3 \times 37 \times a$, para algún dígito $a \neq 0$. Podemos notar que lo anterior es equivalente a tener que $n = 37 \times a$ pero como n es un número de dos dígitos, a solo puede ser 1 o 2 y por ende n puede tener únicamente dos valores. Así, el resultado es 2.

14) La respuesta es 12. Si $abcde$ es un número de cinco dígitos que cumple lo anterior debemos tener que $b = \frac{a+c}{2}$, $d = \frac{c+e}{2}$, $c = \frac{b+d}{2}$, lo que implica que a, c y e deben tener la misma paridad. Sustituyendo b y d en $c = \frac{b+d}{2}$, obtenemos que $c = \frac{a+2c+e}{4}$ y, por lo tanto, $c = \frac{a+e}{2}$. Ahora notemos que al encontrar a, e distintos con las propiedades anteriores obtendremos un número del tipo buscado pues es

fácil ver que como a, e son distintos, entonces los números a, e, $c = \frac{b+d}{2}$, $b = \frac{a+c}{2}$, $d = \frac{c+e}{2}$ son distintos. Si a, e son pares, las únicas parejas que cumplen con las propiedades anteriores son $(2, 6)$, $(4, 8)$ y sus permutaciones. Si a, e son impares las parejas buscadas son $(1, 5)$, $(1, 9)$, $(3, 7)$, $(5, 9)$ y sus permutaciones. Entonces, hay $6 \times 2 = 12$ números que cumplen las condiciones.

15) La respuesta es $2(7 - 2\sqrt{3})$. Como $DC = BC = 2$ y $\angle DCB = 120°$ tenemos por el teorema de Pitágoras que $DB = 2\sqrt{3}$. Sea Q el pie de la altura de P a DB, entonces BQ es igual a la altura desde P a AB.



Dado que el triángulo APB es rectángulo e isósceles, dicha altura mide 1 y, por lo tanto, $QB = 1$. Esto implica que $DQ = 2\sqrt{3} - 1$ y de nuevo por el teorema de Pitágoras $DP^2 = 1 + (2\sqrt{3} - 1)^2 = 2(7 - 2\sqrt{3})$.

Soluciones de la prueba individual. Nivel II. Parte A.

1) Ver la solución del Problema 3 del Nivel I.

2) Ver la solución del Problema 4 del Nivel I.

3) La respuesta es $36°$. Notemos que $\angle IAB = \frac{180° \times 3}{5} = 108°$ y $\angle FAB = \frac{180° \times 4}{6} = 120°$. Por lo tanto, $\angle FAI = 12°$. Además, $IA = AB = AF$ y así, el triángulo FAI es isósceles. Luego, $\angle IFA = \frac{180° - 12°}{2} = 84°$ y $\angle IFE = 120° - 84° = 36°$.

4) Ver la solución del Problema 13 del Nivel I.

5) La respuesta es $\frac{1}{24}$. Notemos primero que dicho producto debe ser un número primo y solo puede ser 2, 3 o 5. Sea p alguno de estos primos, luego en los otros dos tiros se debió obtener un 1 y lo que varía es en cuál tiro salió el primo p, por lo que para cada primo tenemos 3 opciones: $p \times 1 \times 1$, $1 \times p \times 1$ y $1 \times 1 \times p$. Como hay 3 primos válidos, entonces la cantidad de tiros "favorables" son $3 \times 3 = 9$, de un total de $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ resultados posibles. Luego la respuesta es $\frac{9}{216} = \frac{1}{24}$.

6) Ver la solución del Problema 15 del Nivel I.

7) La respuesta es $2017 \times 1009 = 2,035,153$. Notemos que para obtener x^{2016} como término en la multiplicación de binomios, debemos elegir a la x en 2016 de los

binomios multiplicados y uno de los números de exactamente un paréntesis. Entonces, cada uno de los números en los paréntesis aparecerá exactamente una vez multiplicando al término x^{2016}, es decir,

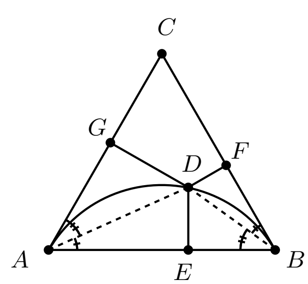
$$1x^{2016} + 2x^{2016} + 3x^{2016} + \cdots + 2017x^{2016} = (1 + 2 + 3 + \cdots + 2017)x^{2016},$$

por lo tanto el coeficiente de x^{2016} es equivalente a la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 2017$. Usando la fórmula de Gauss, la suma es igual a $1 + 2 + 3 + \cdots + 2017 = 2017 \times 2018/2 = 2017 \times 1009$.

8) Ver la solución del Problema 14 del Nivel I.

9) La respuesta es 9. Notemos que desde el 50 hasta el 59 hay 9 números de 2 cifras, que en total aportan 18 cifras. Así desde 50 hasta 99 hay 45 números de 2 cifras y en total se escriben 90 cifras. Además, desde el 100 hasta el 199 hay 81 números de 3 cifras, que en total aportan 243 cifras. Así desde el 100 hasta el 999 hay $8 \times 81 = 648$ números de tres cifras y en total se escriben 1944 cifras. Por tanto del 50 al 999 se escriben $90 + 1944 = 2034$ cifras. Para encontrar la cifra en la posición 2017, hay que regresar del 999 hacia atrás 17 cifras, . . . **9**94995996997998999. Por lo tanto, la cifra 9 ocupa el lugar 2017.

10) La respuesta es 6 cm. Los triángulos rectángulos AED y BFD son semejantes porque el ángulo semi-inscrito $\angle CBD$ es igual al ángulo inscrito $\angle BAD$. Entonces, $\frac{DE}{AD} = \frac{DF}{DB}$, de donde $DE = DF \times \frac{AD}{DB}$. De manera análoga, los triángulos BED y AGD son semejantes. Luego, $\frac{DE}{DB} = \frac{GD}{AD}$, de donde $DE = GD \times \frac{DB}{AD}$.



Multiplicando estas relaciones vemos que DE es la media geométrica de DF y GD, esto es, $DE^2 = \left(DF \times \frac{AD}{DB}\right)\left(GD \times \frac{DB}{AD}\right) = (DF)(GD) = 4 \times 9 = 36$.

11) La respuesta es 333. Sean $A = 111444444$, $B = 444111111$ y $x = 333$. Podemos notar que $A = 334668x$ y $B = 1333667x$ por lo que el máximo común divisor de A y B es múltiplo de x. Además $d = \text{mcd}(334668, 1333667)$ debe dividir a $4 \times 334668 - 1333667 = 5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$ pero 1333667 no es múltiplo de 5, 7, 11 o 13 por lo que 5005 es primo relativo con 1333667 y así $d = 1$. Por tanto, $\text{mcd}(A, B) = x = 333$.

12) La respuesta es 45. Como $x \geq 1$, entonces $x^3 = 2017x + 360$ implica que $x^3 \geq 2017 + 360 = 2377$. Esto a su vez implica que $x \geq 14$ ya que $13^3 = 2197$. Por otro lado, $x^2 = 2017 + \frac{360}{x}$ de modo que

$$44^2 = 1936 < 2017 \leq x^2 \leq 2017 + \frac{360}{14} < 2017 + 26 = 2043 < 46^2 = 2116.$$

La única opción que le queda es $x = 45$. Luego comprobamos $45^3 - 2017(45) - 360 = 45(45^2 - 2017) - 360 = 45(2025 - 2017) - 360 = 45(8) - 360 = 0$. Por lo tanto, concluimos que $x = 45$ es la única solución entera positiva para esta ecuación.

Soluciones de la prueba individual. Nivel II. Parte B.

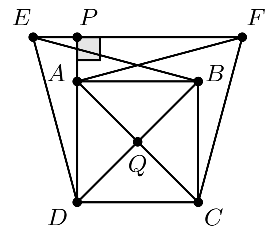
1) Como $100 = 2^2 \times 5^2$, la cantidad de primos relativos con 100 es $100 - 50 - 20 + 10 = 40$. Ahora notemos que si $1 \leq n \leq 50$ es primo relativo con 100, entonces $100 - n$ también lo es. Según el argumento anterior podemos agrupar los primos relativos en parejas $(n, 100 - n)$ tales que cada pareja suma 100 y, como 50 no es primo relativo con 100, entonces podemos dividir los números de forma exacta en $\frac{40}{2} = 20$ parejas. Por lo tanto, la respuesta es $20 \times 100 = 2000$.

2) Notemos que los números menores a 10^4 tienen a lo más 4 dígitos. Si los dígitos no se repiten, tenemos $9 + 9 \times 9 + 9 \times 9 \times 8 + 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 9 + 81 + 648 + 4536 = 5274$ números balanceados. Si un dígito se repite, entonces todos los dígitos se repiten (de otra forma no sería balanceado). En el caso en que cada dígito está dos veces y ninguno es cero, tenemos $\binom{9}{2}$ formas de escoger los dígitos y $\binom{4}{2}$ formas de acomodarlos (si nuestro número es de 4 dígitos). Por otro lado, si consideramos las parejas de dígitos que contienen al cero, estas son 9 y hay solo 3 opciones para acomodar las parejas, dado que el 0 no puede ir al principio del número. Por tanto en este caso hay $\binom{9}{2}\binom{4}{2} + 9 \times 3 = 216 + 17 = 243$. Si nuestro número es de dos dígitos tenemos solamente 9 opciones. Por tanto en este caso tenemos $243 + 9 = 252$ números. Si los números se repiten 3 o 4 veces tenemos $9 \times 2 = 18$ números, pues para cada uno de los 2 casos se tienen 9 posibilidades. Por tanto, en total contamos $5274 + 252 + 18 = 5544$ números balanceados.

3) Sean P el punto de intersección de AD con EF y Q el centro del cuadrado. Notemos que $[DCFE] = \frac{PD(DC+FE)}{2}$ y $[ABFE] = \frac{PA(AB+FE)}{2} = \frac{PA(DC+FE)}{2}$. Entonces,

$$\frac{[DCFE]}{[ABFE]} = \frac{PD(DC + FE)}{PA(DC + FE)} = \frac{PD}{PA}.$$

Es fácil ver que C, A y E son colineales al igual que D, B y F. Además, por simetría tenemos que AB es paralela a EF. Por lo tanto $\angle DPF = \angle DAB = 90°$ y $\angle DBA = \angle DFP = 45°$. Así $PD = PF$ y $2PD^2 = PD^2 + PF^2 = DF^2$. Por lo tanto, $PD = \frac{DF}{\sqrt{2}}$. Como el triángulo AFC es equilátero y $AC = 2$, tenemos que $FQ = \sqrt{3}$ y por lo tanto $DF = 1 + \sqrt{3}$, $PD = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}$ y $PA = PD - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$.

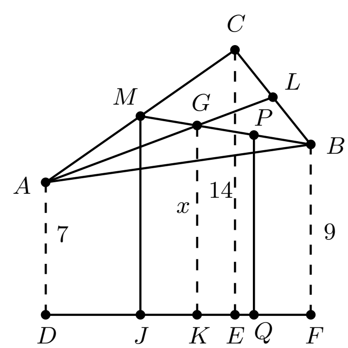


Así, $\dfrac{[DCFE]}{[ABFE]} = \dfrac{PD}{PA} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}$.

Soluciones de la prueba individual. Nivel III. Parte A.

1) La respuesta es $\frac{1}{9}$. La descomposición en primos de $10!$ es 2^8 es $2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$. Los divisores impares de $10!$ deben ser entonces divisores de $3^4 \times 5^2 \times 7$. Como hay $5 \times 3 \times 2 = 30$ de estos divisores, la probabilidad buscada es $\frac{30}{270} = \frac{1}{9}$.

2) La respuesta es 10. Sean D, F, E, K las proyecciones respectivas de A, B, C, G sobre la recta. Los segmentos DA, EC y FB son paralelos, formando varios trapecios. El baricentro G es el punto de intersección de las medianas AL y BM, así que la distancia que se busca es $GK = x$. Sea P el punto medio de GB y sean J y Q las proyecciones de M y P sobre la recta. Entonces, x será la línea media del trapecio $MJQP$, $x = \frac{MJ+QP}{2}$. Notemos que MJ es la línea media del trapecio $ADEC$, entonces $MJ = \frac{7+14}{2} = \frac{21}{2}$.



Análogamente, QP es la línea media del trapecio $GKFB$ ya que $GB = 2GM$. Entonces $PQ = \frac{9+x}{2}$. Sustituyendo, obtenemos la ecuación $x = \frac{\frac{21}{2}+\frac{9+x}{2}}{2} = \frac{30+x}{4}$ cuya solución es $x = 10$.

3) Ver la solución del Problema 9 del Nivel II.

4) Ver la solución del Problema 11 del Nivel II.

5) Ver la solución del Problema 5 del Nivel II.

6) Ver la solución del Problema 7 del Nivel II.

7) Ver la solución del Problema 10 del Nivel II.

8) Ver la solución del Problema 12 del Nivel II.

9) La respuesta es $\frac{2017\times 1009}{2}$. Para cada $1 \leq k \leq 2017$, un subconjunto $\mathcal{A}$ que contiene a k se puede expresar de la forma $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \{k\}$ donde $\mathcal{B}$ es un subconjunto que no contiene a k. Como hay 2^{2016} subconjuntos $\mathcal{B}$, entonces el número k aparecece 2^{2016} veces como sumando en $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. Así, la suma de todos los conjuntos $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ es igual a

$$2^{2016}(1+2+3+\cdots+2017) = \frac{2^{2016}\times 2017 \times 2018}{2} = 2^{2015}\times 2017 \times 2018.$$

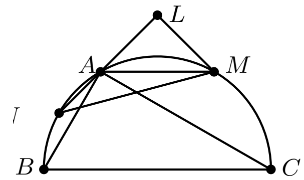
Dado que hay en total 2^{2017} subconjuntos, la probabilidad buscada es $\frac{2^{2015}(2017)(2018)}{2^{2017}}$ $= \frac{2017\times 1009}{2}$.

10) La respuesta es 144, 169, 441, 961, 121, 484, 676, 100, 400, 900. Sean $x^2 = abc$, $y^2 = cba$. Entonces, tenemos que $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 99(a-c)$. En consecuencia, si $x \neq y$, 99 divide al producto $(x+y)(x-y)$. Como los cuadrados deben ser números de tres cifras y $31^2 = 961$, entonces tenemos que $10 \leq x, y \leq 31$. Entonces $21 \leq x+y \leq 61$ y $1 \leq x-y \leq 21$. Por tanto tenemos dos casos: *(1)* $x+y = 27, 36, 45, 54$ y $x-y = 11$, *(2)* $x+y = 33, 44, 55$ y $x-y = 9, 18$. El caso *(1)* no arroja soluciones, en tanto que el caso *(2)* nos da $x^2 = 21^2 = 441$ y $x^2 = 31^2 = 961$. Por otro lado, si $x = y$ entonces $a = b$ y tenemos las soluciones $x^2 = 11^2 = 121$, $x^2 = 22^2 = 484$ y $x^2 = 26^2 = 676$. Finalmente, si un número a ponerlo al revés no tiene 3 cifras entonces el número original termina en 0, así que es divisible entre 10 y por tanto entre 100. Aquí las soluciones son $x^2 = 10^2 = 100$, $x^2 = 20^2 = 400$ y $x^2 = 30^2 = 900$.

11) La respuesta es 462^3. Para minimizar el producto de los boletos, basta considerar los 6 números más pequeños que cumplan las condiciones del problema, lo cual implica que dichos números deberán estar formados por parejas de los 4 números primos más pequeños, sin contar al 5 (ya que $\binom{4}{2} = 6$). Así los números se formarán tomando parejas del conjunto $\{2, 3, 7, 11\}$, por lo que el producto de ellos será $2^3 \times 3^3 \times 7^3 \times 11^3 = 462^3$. El siguiente arreglo muestra una posible disposición de los números.

Pasajero	1	2	3	4	5	6
Boleto	$2\times 7 = 14$	$3\times 11 = 33$	$2\times 3 = 6$	$7\times 11 = 77$	$2\times 11 = 22$	$3\times 7 = 21$

12) La respuesta es $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$. Considera L el pie de la altura desde M sobre AN. Como N y M son puntos medios de los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$, entonces $\angle MNA = 30°$ y $\angle AMN = 15°$. Por lo tanto, el triángulo MNL es rectángulo de $30° - 60° - 90°$ y el triángulo LAM es rectángulo isósceles. Por otro lado, $\angle MCA = 30° = \angle ACB$. Así, $AB = AM = 1$, entonces el triángulo LAM tiene hipotenusa 1, lo cual implica que $LM = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Luego, $LN = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ y $[ANM] = [LMN] - [LAM] = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

Soluciones de la prueba individual. Nivel III. Parte B.

1) Ver la solución del Problema 3 del Nivel II.

2) Supongamos que los tres números son primos. Si uno de ellos fuera par, digamos $a = 2$, entonces b y c son impares, luego $b + c + bc$ es impar, y no es posible que $a \mid b + c + bc$, por lo que ninguno de los números puede ser par. Como $a \mid (a+1)(b+1)(c+1) - 1$, $b \mid (a+1)(b+1)(c+1) - 1$, $c \mid (a+1)(b+1)(c+1) - 1$ y a, b, c son primos, entonces $abc \mid (a+1)(b+1)(c+1) - 1$. Sin embargo,

$$1 < \frac{(a+1)(b+1)(c+1) - 1}{abc} < \frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc} = \frac{a+1}{a} \cdot \frac{b+1}{b} \cdot \frac{c+1}{c}$$
$$\leq \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{7} < 2,$$

por lo que abc no divide a $(a+1)(b+1)(c+1) - 1$, lo cual es una contradicción. Luego, alguno de los números a, b, c no puede ser primo.

3) Supóngase que M tiene más de 3 divisores primos, entonces, tendría cuando menos $2 \times 2 \times 2 = 8$ divisores, una contradicción, por lo que M debe tener a lo mucho dos divisores primos, y siendo este el caso es fácil ver que M es de una de las siguientes formas p^5 o p^2q.

Caso (1): $M = p^5$. En este caso la suma de los divisores de M es $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 3500$: Si $p \leq 5$ entonces el lado izquierdo es mayor que el lado derecho, si $p = 2, 3$ tampoco se da la igualdad, por lo que no hay soluciones en este caso.

Caso (2): $M = p^2q$. En este caso los divisores son $1, p, p^2, q, pq, p^2q$ y su suma puede ser escrita como: $(p^2+p+1)(q+1) = 3500 = 2^2 \times 5^3 \times 7$. Pero p^2+p+1 es siempre impar, luego $q+1$ debe ser par y q es impar. Supóngase que $q+1 = 4k$ entonces tenemos que $k(p^2 + p + 1) = 5^3 \times 7$. Analizando las congruencias módulo 5, notamos que $p^2 + p + 1$ no puede ser múltiplo de 5, luego debe ser 1 o 7, resolviendo estos dos casos, concluimos que el único valor válido para p es $p = 2$, por lo que $k = 125$ y $q = 4 \times 125 - 1 = 499$ que es también primo. Luego el único valor posible para M es $22 \times 499 = 1996$.

Soluciones de la prueba por equipos. Nivel I.

1) Consideremos el pensamiento de Toño. Como Toño puede pagar con 3 monedas y que le regresen cambio, entonces a lo más, la cantidad que tiene que pagar es 30. Ahora, podrían regresarle el cambio con 2 monedas, por lo tanto la diferencia con esas 3 monedas que pagó es al menos 2 pesos. Por lo tanto la cantidad a lo más es 28 pesos. Si paga con 3 monedas ninguna de ellas puede ser de 1 o 2 pesos porque la cantidad que le regresarían es al menos 2 pesos, volviendo innecesaria la moneda de 1 o 2 pesos. Por lo tanto en el primer pensamiento de Toño, pagó sólo con monedas de 10 y 5 pesos. Analizemos primero el caso donde se usan 3 monedas de 10 pesos. El cambio puede darse usando a lo más una moneda de 5 pesos (si se usan dos se vuelve innecesaria una de 10 pesos). Si se utiliza, el cambio será 6 o 7 pesos y la cantidad a pagar sería 24 o 23 pesos. Si no se utiliza, el cambio será 2, 3 o 4 pesos, y la cantidad a pagar sería 28, 27 o 26 pesos. Si se usa al menos una moneda de 5 pesos, en el cambio sólo podrán utilizarse monedas de 1 y 2 pesos, pues de lo contrario la moneda de 5 pesos se volvería innecesaria, en este caso el cambio se dará sólo con monedas de 1 o 2 pesos y deberá ser 2, 3 o 4 pesos. Tres monedas de 5 pesos: La cantidad a pagar sería 13, 12 u 11 pesos. Dos monedas de 5 pesos y una de 10 pesos: La cantidad a pagar sería 18, 17 o 16. Una moneda de 5 pesos y dos de 10 pesos: La cantidad sería 23, 22 o 21 pesos.

2) Como empieza en el 6, después de 2 saltos debería llegar al 16 que es potencia de 2, por lo tanto regresa al 14. Notemos que va saltando de par a impar y viceversa siempre que no caiga en una potencia de 2, pero cada dos saltos es que va de par en par con diferencia de 10. Entonces, la siguiente potencia de 2 en la que caerá es la siguiente cuya cifra de las unidades sea igual a 4, es decir, el 64, al cual llega después de $\frac{64-14}{5} = 10$ saltos. En este punto regresa al vértice 62 y no volverá a caer en una potencia de 2 hasta la siguiente que termine en 2, es decir la 512 a la cual llega después de $\frac{512-62}{5} = 90$ saltos. Aquí regresará al vértice 510 y no caeŕa en potencia de 2 de nuevo en esta vuelta porque no hay potencias de 2 que terminen en 0. Por lo tanto, la primera vez que supere el 1, es cuando salte desde el 2015, es decir con $\frac{2020-510}{5} = 302$ saltos más. Por lo tanto, la pulga necesitó de $2 + 10 + 90 + 302 = 404$ saltos.

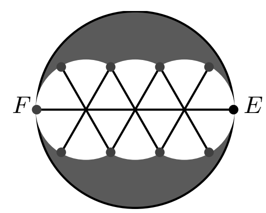
3) La sucesión $3, 5, 7\ldots$ corresponde a la de los números impares a partir del 3, es decir, $\{2n + 1 \mid n = 1, 2, 3\ldots\}$. Ahora veamos cómo localizamos el número que cierra cada cuadrado, para pasar del primer cuadrado le añadimos 3 cuadrados, del segundo al tercero le añadimos 5 cuadrados, así los términos de la sucesión van quedando agrupados según se van añadiendo de la siguiente manera: $\{3\}, \{5, 7, 9\}\{11, 13, 15, 17, 19\}, \ldots$, donde el término que cierra el k-ésimo cuadrado es $2(1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)) + 1 = 2(k^2) + 1$. Entonces, el número que cierra el 18° cuadrado es $2(18^2) + 1 = 2(324) + 1 = 649$.

4) Si Edgar está en el carril 1, entonces como Omar está en un extremo y ya está ocupado el 1, Omar está en el 5. Como Beto no nada al lado de Edgar, entonces debe estar en algún carril de 3 o 4, pero si está en el 3 forzosamente nadaría al lado de Mario (pues los únicos carriles libres serían el 2 y 4), entonces Beto estaría

en el 4, lo cual obliga a que Miguel y Mario naden juntos, pero eso no ocurre. En conclusión si Edgar estuviera en el carril 1 forzaría una configuración que no cumple las cuatro afirmaciones. Por lo anterior Edgar debe estar en el 4, lo cual obliga a que Beto este en el carril 1 o 2. En este caso si Beto está en el carril 1, Omar estaría en el 5 lo cual fuerza que Mario y Miguel naden juntos lo cual no ocurre. Luego Beto debe estar en el carril 2, esto fuerza a que Mario esté en el carril 5, Omar en el 1 y Miguel en el 3, la cual es una configuración forzada que cumple las condiciones, por lo tanto esta es la única configuración posible.

5) Consideremos un punto P en alguna de las intersecciones de las rectas y veamos cuántos triángulos tienen a P como vértice. Como hay a lo más $\binom{6}{2} = 15$ intersecciones y cada una de las 6 rectas tienen 5 puntos de intersección, nos quedan $15 - 9 = 6$ puntos que pueden ser otro de los vértices del triángulo. Una vez elegido uno de esos 6 puntos, las dos rectas que pasan por él intersecan a las otras dos rectas que teníamos, lo cual nos dice que nos queda un único punto para elegir que sea vértice del triángulo. Por lo tanto, para cada vértice tenemos 6 triángulos que cumplen las propiedades del problema. Como hay 15 vértices posibles y cada triángulo tiene 3 vértices, concluimos que hay $\frac{6\times 15}{3} = 30$ triángulos de los que se querían contar.

6) Dividamos la figura de la siguiente manera:



El área de la circunferencia mayor es 4π. El área de cada círculo blanco original es π. La figura blanca está formada por $\frac{10}{6}$ de círculo blanco y cuatro triángulos equiláteros. Cada triángulo tiene un área de $\frac{\sqrt{3}}{4}$. El área sombreada es $4\pi - \frac{10\pi}{6} - 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3}$.

7) Sean $A = abcd$ y $N = pqrs$ dos enteros que se escriben con las mismas cifras. Según las condiciones del problema tenemos que $A = 3N$, con lo cual tenemos que $a+b+c+d = p+q+r+s$ es un múltiplo de 3. En consecuencia, N también es un múltiplo de 3, digamos $N = 3T$, y por tanto $A = 9T$. Así, concluímos que $a+b+c+d = p+q+r+s$ es un múltiplo de 9. Como A es un número de 4 cifras, tenemos que $A \leq 9999$. Entonces tenemos que $N \leq 3333$. Como ninguna de las cifras puede ser 2 o 4, podemos concluir que solamente existen dos casos: (1) $p = 3$ y (2) $p = 1$.

Caso (1): Si $p = 3$, entonces $a = 9$ y por tanto la suma de las restantes dos cifras debe dejar residuo 6 al dividirse entre 9. Además q no puede ser mayor a 4 ya que de lo contrario $A = 3N$ tendría 5 cifras. Entonces las únicas posibilidades para las restantes dos cifras son $\{0,6\}$, $\{1,5\}$, $\{3,3\}$. Procedemos a analizar cada una de estas opciones. Para $\{0,6\}$ tenemos $2! = 2$ formas de acomodar las cifras: 3069, 3096. Lo mismo sucede para $\{1,5\}$, con los números 3195 y 3159; y también en el caso $\{3,3\}$ con las opciones 3339 y 3393. Como ninguno de estos números cumple la condición $A = 3N$, observamos que en este caso no hay solución.

Caso(2): Si $p = 1$ entonces $1000 \leq N \leq 1999$ y por tanto $3000 \leq A \leq 5997$. De aquí podemos concluir que hay dos casos: $a = 3$ o $a = 5$. En el primer caso, las dos cifras restantes al sumarse deben dejar residuo 5 al dividirse entre 9; en tanto que en el segundo caso el residuo de la suma deberá ser 3. Entonces surgen las siguientes opciones: para $a = 3$ tenemos $\{0,5\}$, $\{5,9\}$, $\{6,8\}$ y $\{7,7\}$; en tanto que para $a = 5$ tenemos $\{0,3\}$, $\{3,9\}$, $\{5,7\}$ y $\{6,6\}$. Analizando cada una de estas opciones como en el inciso anterior nos lleva a concluir que el único número que satisface las condiciones del problema es $N = 1305$.

8) Sea abc el número de tres dígitos tales que $a > b > c > 0$. Entonces $a + c$ debe ser número impar. Si $a + c < 10$, eso significa que el número de las decenas de la suma es $2b$, que es par, lo cual no es posible, por lo tanto $a + c > 10$. Si $2b + 1 > 10$, entonces el dígito de las decenas de la suma es $a + c + 1$, pero como $a + c$ debe ser impar, entonces $a + c + 1$ es par, por lo cual no es posible. Por lo tanto $2b + 1 \leq 9$, o sea $b \leq 4$. Si $b = 4$, entonces como $a + c$ es impar mayor que 10, las únicas soluciones en este caso son 942 y 843. Si $b = 3$, entonces como $a + c$ es impar mayor que 10, la única solucíon en este caso es 932. Si $b = 2$, entonces $c = 1$ y no existe un dígito a tal que $a + c$ sea impar mayor que 10. En resumen, las únicas soluciones son 932, 942 y 843.

Soluciones de la prueba por equipos. Nivel II.

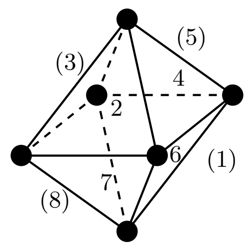
1) Ver la solución del Problema 3 del Nivel I.

2) Ver la solución del Problema 4 del Nivel I.

3) Por ser polígonos regulares resulta que $\angle A_nA_1A_2 = 180°(\frac{n-2}{n})$ y $\angle B_{n+1}A_1A_2 = 180°(\frac{n-1}{n+1})$. Luego, $\angle B_{n+1}A_1A_n = \angle B_{n+1}A_1A_2 - \angle A_nA_1A_2 = \frac{180° \times (n-1)}{n+1} - \frac{180° \times (n-2)}{n} = \frac{360°}{n(n+1)}$. Como $A_nA_1 = A_2A_1 = B_{n+1}B_1$, el triángulo $B_{n+1}A_1A_n$ es isósceles, de donde $\angle A_1B_{n+1}A_n = \angle A_1A_nB_{n+1} = \frac{180° - \angle A_nA_1B_{n+1}}{2} = \frac{180° - \frac{360°}{n(n+1)}}{2} = \frac{90° \times (n^2+n-2)}{n(n+1)}$. Si n cumple lo pedido, entonces $\frac{90° \times (n^2+n-2)}{n(n+1)} = \frac{2}{3} \times \angle A_1B_{n+1}B_n = \frac{2}{3} \times \frac{180° \times (n-1)}{n+1}$, que es equivalente a que $n^2 - 7n + 6 = 0$. Luego, $n = 1$ o $n = 6$, de donde el único valor posible para n es 6.

4) Ver la solución del Problema 8 del Nivel I.

5) El siguiente acomodo funciona (note que los números entre paréntesis representan las caras que están por detrás):



6) Notemos primero que basta probar que $BP = PD$. Como subtienden el mismo arco, tenemos que $\angle ADP = \angle ABP$. Entonces, dado que los triángulos BEP y DAP son obtusángulos, podemos concluir que son congruentes. Luego, $BP = PD$.

7) Para cada n, como ab es fijo, $a+b$ es mínimo cuando $a-b$ lo es, pues $a+b$ mínimo si y solo si $(a+b)^2$ es mínimo, lo cual es cierto si y solo si $(a+b)^2-4ab$ es mínimo (puesto que ab es constante), esto es, si y solo si $a-b$ es mínimo. Ahora bien, para cada número de la forma n^2+n tenemos que los a, b que cumplen el enunciado son $a = n+1$ y $b = n$ pues son coprimos y $a-b = 1$ es mínimo. Entonces, $f(n^2+n) = s(n+1) - s(n)$. Así,

$$\begin{aligned}
&f(1^2+1) + f(2^2+2) + \cdots + f(2017^2+2017)\\
&= s(2) - s(1) + s(3) - s(2) + s(4) - s(3) + \cdots + s(2018) - s(2017)\\
&= s(2018) - s(1) = 11 - 1 = 10.
\end{aligned}$$

8) Una estrategia puede ser la siguiente. Sea k el número que Juan está pensando. Llamemos a y b a los números tales que Mario puede estar seguro que el número de Juan está entre a y b (inclusive), estos se irán actualizando según la información que vaya recabando Mario. Por ejemplo, inicialmente $a = 1$ y $b = 1000$. Sea m igual a $\frac{(a+b)}{2}$ o su parte entera en caso de que tenga decimal. Posteriormente, Mario puede hacer la pregunta ¿Es el número que estás pensando igual, mayor o menor a m? Si m es igual al número que está pensando Juan, entonces Mario ya ganó. Sino, hay dos opciones: si responde que **menor**, actualizaremos nuestra b para que sea igual a $m-1$, ya que sabíamos que $a \leq k \leq b$ y por la información de la respuesta sabemos que $k \leq m$ (notemos que como inicialmente $a \leq k \leq m$, siempre se cumplirá que $a \leq m \leq b$), por lo tanto, ahora sabremos que $a \leq k \leq m$, por lo cual ahora m será el número que sabemos es mayor o igual a k. Haciendo un razonamiento análogo, si Juan responde **mayor**, entonces podemos asignar a la nueva a para que sea igual a $m+1$.
Ahora bien, Mario estará seguro del número que está pensando Juan cuando $a = b$ (pues entonces $a \leq k \leq b = a$, y por lo tanto $k = a$). También notemos que después de cada pregunta, la distancia $(b-a)$ entre a y b, irá disminuyendo pues en caso de que la respuesta sea **mayor**, como $\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{a+b}{2}$, entonces $b-(m+1) \leq b - (\frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}) \leq \frac{b-a}{2} - 1$. Análogamente, si la respuesta es **menor**, se concluye que $(m-1) - a \leq \frac{b-a}{2}$. Así pues, la nueva distancia entre a y b será a

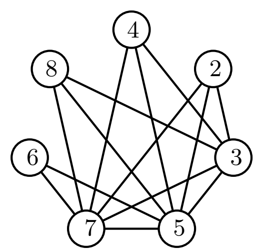
lo más $\frac{b-a}{2}-\frac{1}{2}$ en el siguiente paso.

Inicial	1	2	3	4	5	6	7	8	9
999	499	299	124	61	30	14	6	2	0

Por lo tanto, al cabo de 9 preguntas Mario puede saber cuál número estaba pensando Juan con esta estrategia.

Soluciones de la prueba por equipos. Nivel III.

1) El siguiente arreglo funciona:



2) Primero notemos que $x^3+3x^2+z^2+2x+3y=x(x+1)(x+2)+3y+z^2$, sin importar el valor de x. Como x, $x+1$, $x+2$ son tres enteros consecutivos, entonces uno de ellos es múltiplo de 3, por lo que $x(x+1)(x+2)+3y$ es múltiplo de 3, luego si existe una terna de enteros tal que $x^3+3x^2+z^2+2x+3y=2018$, entonces z^2 deja residuo 2 al dividirse entre tres, algo imposible ya que los cuadrados dejan residuo 1 o 0 al dividirse entre tres, de lo anterior se concluye que no existen ternas como las pedidas.

3) Ver la solución del Problema 3 del Nivel II.

4) Ver la solución del Problema 6 del Nivel II.

5) Ver la solución del Problema 7 del Nivel II.

6) Supongamos que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son los círculos que buscamos de tal manera que O_i es el centro de C_i. Sea C el círculo con centro en P y radio 1. Es claro que $O_1, O_2, \ldots, O_n$ están al borde de C. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $O_1, O_2, \ldots, O_n$ forman un polígono convexo, es decir, que los centros están etiquetados en orden de manera que $\angle O_1PO_2+\angle O_2PO_3+\cdots+\angle O_nPO_1=360°$. Notemos que el hecho de que O_i no esté en el interior o en el borde de C_{i+1} y que el triángulo O_iPO_{i+1} sea isósceles implica que $\measuredangle O_iPO_{i+1}>60°$. Dadas las observaciones anteriores es fácil deducir que el máximo número de circunferencias es 5.

7) Como la única relación entre a y a^* son sus dígitos, aseguraremos que ambos sean divisibles por enteros de los que tenemos criterio de divisibilidad. Es claro que

$99 \mid a$ si y solo si $99 \mid a^*$. De esta manera, $D = 99k > 2017$ con $k > 20$. Como buscamos que se pueda asegurar la divisibilidad con un criterio, comprobemos que $k = 25$. Tras varios intentos se llega a que a puede ser de la forma $52xy75$, con lo que aplicando los criterios de divisibilidad, $9 \mid x + y + 1$ y $11 \mid x - y + 5$. Para $x = 7$, $y = 1$ esto se cumple, ya que $a = 527175$ satisface.

8) Consideremos los números $x = 13^2$ y $w = 13^2 + 13 \times 12$. Si $n < x$, entonces $n!$ contiene a lo más 12 factores 13 y no puede ser bueno. Si $n = x$ entonces $n!$ contiene los primeros doce múltiplos de 13 (que tienen solo un factor 13) y 13^2 que tiene dos. El exponente de 13 en $(13^2)!$ es 14 y no es bueno. si $x < n < w$, entonces $n!$ contiene 14 factores de x y a lo más 11 factores extras pues los múltiplos de 13 entre x y w solo tienen factor 13, por lo tanto $n!$ tiene 14, 15, $\ldots$ o 25 factores 13 y no es bueno. Si $n = 13^3 + 13 \times 12$, entonces $n!$ es bueno, pues tiene 26 factores 13. Ningún número de los que buscamos es mayor a $13^2 + 13 \times 12 + 13 = 2 \times 13^2$, pues $n = w$ es bueno. Notemos que si $n = w$, $w + 1, \ldots,$$w + 12$ entonces $n!$ tiene 26 factores 13 y es bueno, además $n - 13 < w$ y sabíamos que ningún número menor a w era bueno. Por lo tanto, los números son $w, w + 1, \ldots, w + 12$ con $w = 13^2 + 13 \times 122$.

TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2018, No. 2

Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Educación Básica

En el año 2017 se celebró el primer concurso nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Educación Básica (OMMEB) con sede en Oaxtepec, Morelos, con la participación de 23 Estados del país. La intención es que esta Olimpiada actúe como el proceso selectivo nacional para elegir a los equipos que nos representan en la IMC (Competencia Internacional de Matemáticas), competencia de Primaria y Secundaria que cada año se celebra en el sureste asiático. Aunque México lleva varios años participando en la IMC, esta fue la primera vez que se formó una preselección a partir de estudiantes que hubieran presentado exámenes que tienen el mismo formato que la competencia internacional. Los exámenes y soluciones del primer Concurso Nacional de la OMMEB fueron publicados en los números 3 y 4 de Tzaloa, año 2017; los exámenes selectivos del proceso 2017-2018 aparecieron en el Folleto Introductorio OMMEB 2018; y los resultados del primer equipo IMC formado de esta manera los tendremos hasta julio de este año. Como el Concurso Nacional de la OMMEB se celebra en junio, el equipo lleva más de un año preparándose para la competencia internacional veraniega.

Una de las grandes oportunidades que nos abrió la creación de la OMMEB fue la posibilidad de llegar a participantes más jóvenes con el mismo entusiasmo que sus compañeros y compañeras que participan en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Sin embargo, es probable que encuentren la mayoría del contenido de esta revista ligeramente por encima de su nivel, de modo que quizás no sea muy útil. Con eso en mente, iniciamos esta sección que está pensada para nuestros competidores más jóvenes.

Puesto que únicamente hemos celebrado una edición, una de las tareas más importantes es construir un banco de problemas para entrenar y prepararnos. Este conjunto se irá haciendo más grande de manera natural conforme pase el tiempo y podremos compartir exámenes selectivos de distintos estados. Además, hay problemas de otros exámenes que funcionan bastante bien para entrenamiento como los Exámenes Eliminatorios que propone el Comité de la Olimpiada o los exámenes del Canguro Matemático, que están disponibles en ommenlinea.org -no olvides hacerlos sin leer opciones. En esta primera entrega, presentamos los problemas de los exámenes selectivos del nivel 2 de la cuarta etapa en la Ciudad de México, uno de los equipos más fuertes de la primera edición. Al momento de escribir esto, falta todavía una etapa para definir al equipo que representará a la Ciudad de México en el Concurso Nacional de la 2^a OMMEB. Tres de los participantes de la Ciudad de México en la 1^a OMMEB, formaron parte de los equipos mexicanos para la IMC 2018: Mateo Iván Latapí Acosta y Rosa Victoria Cantú Rodríguez, del equipo de primaria, y Tomás Francisco Cantú Rodríguez, del equipo de secundaria. La presencia en internet de la Olimpiada de Matemáticas en la Ciudad de México sigue haciendo referencia al Distrito Federal en el nombre de su sitio http://www.omdf.matem.unam.mx/, y el proceso selectivo para la OMMEB se conoce como el Concurso de Primaria y Secundaria. Para cuando esta revista llegue a tus manos, los equipos de la Ciudad de México estarán listos para refrendar su excelente papel en la segunda edición de la OMMEB.

Tanto las categorías como el formato de la OMMEB/IMC son muy diferentes a lo que estamos acostumbrados. Vamos a repasarlo:
Nivel 1: Para estudiantes de 4° y 5° de Primaria.
Nivel 2: Para estudiantes de 6° de primaria y 1° de secundaria.
Nivel 3: Para estudiantes de 2° de secundaria.

Además, presentan dos pruebas distintas: una prueba individual y una prueba por equipos. Incluimos aquí problemas diseñados para pruebas individuales. Para el Nivel 1, la prueba individual consiste de 15 problemas de respuesta cerrada (sin procedimiento ni explicación) para resolver en 90 minutos. Para los Niveles 2 y 3, la prueba consiste de 12 problemas de respuesta cerrada y 3 problemas abiertos para 120 minutos. Además, el examen tiene sus propias costumbres y reglas muy estrictas: tu respuesta debe escribirse en el lugar indicado para ello o no se tomará en cuenta; tu explicación debe caber en una página y nada más una. Las respuestas deben expresarse de una forma simplificada y como una expresión cerrada, evitando dejar operaciones indicadas en la medida de lo posible. Este concurso es muy rápido: hay que resolver muchos problemas con relativamente poco tiempo, de modo que hay que venir armados con muchos trucos, estrategias, heurísticas y algo de suerte. Para los Niveles 2 y 3, la parte de respuesta cerrada y la parte de respuesta abierta tienen el mismo valor en puntos, de modo que es tan importante resolver los problemas rápido como saber explicarlos.

OMMEB, Ciudad de México, Cuarta Etapa, Nivel 2

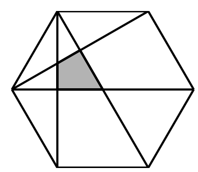
Parte A

1) Denisse tiene una calculadora que tiene una tecla $\otimes$. Cuando Denisse escoge dos números a y b y hace la operación $a \otimes b$, la calculadora calcula el resultado de

$(2 \times a) + (3 \times b)$. Por ejemplo, $1 \otimes 4 = (2 \times 1) + (3 \times 4) = 2 + 12 = 14$. ¿Cuánto da la calculadora si Denisse le pide que calcule $((1 \otimes 2) \otimes 3) \otimes 4$?

2) Lalo tiene 4 llaves y 4 candados. Cada llave abre exactamente un candado. Sin embargo, Lalo olvidó cuál llave abre cuál candado. Si Lalo prueba una llave por candado a la vez, ¿cuántas veces debe Lalo probar las llaves en los candados para saber cuál llave abre cuál candado?

3) Un hexágono regular de área 1 se muestra en la figura. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



4) ¿Cuánto vale la suma de los dígitos del número $10^{2018} - 2018$?

5) Karla invitó a varios amigos a su casa, pero no sabe si van a venir 7 u 8 personas. Quiere partir un pastel en pequeños pedazos, no necesariamente todos del mismo tamaño, de manera que no importe cuántas personas vengan a la fiesta, pueda servir todo el pastel y darle la misma cantidad de pastel a cada invitado y a ella misma. ¿Cuál es la mínima cantidad de piezas en las que debe partir el pastel?

6) Alfie organizó una fiesta para su cumpleaños. Invitó a tres grupos de amigos: los de la escuela, los de su cuadra y los de la olimpiada. Los amigos de cada uno de los tres grupos se conocen todos entre sí, pero no conocen a ninguna persona de otro de los grupos de amigos. Cuando llegaron a la fiesta, todos saludaron a Alfie y se saludaron entre ellos. Los que ya se conocían se saludaron con un abrazo y los que no se conocían se saludaron dándose la mano. Si a la fiesta fueron 10 amigos de la escuela, 4 de la cuadra y 15 de la olimpiada, ¿cuántos apretones de mano hubo?

7) El triángulo acutángulo isósceles ABC, con $AB = AC$, está inscrito en una circunferencia. La tangente BP a la circunferencia en B, con P y A del mismo lado con respecto a BC, forma con el lado BC un ángulo de $66°$. ¿Cuánto vale el ángulo $\angle ACB$?

8) Sean a y b enteros positivos tales que a^b tiene exactamente 5 divisores positivos y b^a tiene exactamente 7 divisores positivos. ¿Cuántos divisores positivos tiene $a \times b$?

9) ¿Cuántos números de 3 dígitos abc existen tales que cuando les sumas el número que resulta de invertir sus dígitos, (es decir, el cba) te da el doble del número original?

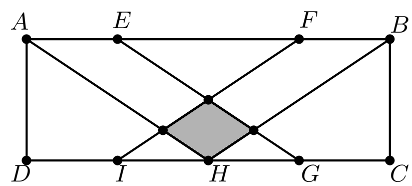
10) En el cuadrado $ABCD$, sea P un punto dentro de él tal que el triángulo APD es equilátero. Sea Q el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle PAD$ con DC. Si $BC = 2$, calcula el perímetro del cuadrilátero $APQD$.

11) Un entero positivo n deja 35 de residuo cuando se divide entre 2018 y también cuando se divide entre 2019. ¿Cuál es el residuo cuando se divide a n entre 3027?

12) ¿Cuántos cuadrados perfectos menores que 2^{2018} existen tales que todos sus dígitos sean impares?

Parte B

1) En el rectángulo $ABCD$, $AE = FB = CG = GH = HI = DI$. ¿Cuál es la razón del área sombreada entre el área del rectángulo $ABCD$?



2) Encuentra el número de parejas de enteros positivos (a, b) con $1 \leq a < b \leq 15$ tales que existe al menos un entero positivo m con $a < m < b$ tal que m es divisible por todos los divisores comunes de a y b.

3) La rana Reneé está parada en un lirio acuático que tiene el número 1. Enfrente de ella hay 19 lirios más, en fila, numerados del 2 al 20. La rana Reneé puede saltar 1, 2 o 3 lirios en cada salto que da y su objetivo es llegar al lirio número 20. Por ejemplo, al principio podría llegar al lirio marcado con el 2, el 3 o el 4. Desgraciadamente, los lirios que tienen números primos están envenenados y si cae en uno de ellos, se muere. ¿De cuántas formas distintas puede llegar la rana Reneé al lirio número 20?

Soluciones de los problemas de la parte A

1) Hacemos paso a paso, de adentro hacia afuera: $1 \otimes 2 = (2 \times 1) + (3 \times 2) = 2 + 6 = 8$; $8 \otimes 3 = (2 \times 8) + (3 \times 3) = 16 + 9 = 25$; $25 \otimes 4 = (2 \times 25) + (3 \times 4) = 50 + 12 = 62$. La respuesta es 62.

2) Para saber cuál llave abre el primer candado, Lalo debe probar a lo más 3 llaves; si ninguna abre el candado, entonces debe abrirlo la cuarta. Ahora solo le quedan 3 llaves y debe probar a lo más 2 para saber cuál abre el segundo candado. Solo debe probar una de las que le quedan para saber cuál llave abre el tercer candado y la llave que sobra tiene que abrir el último candado. En total, son necesarios a lo más $3 + 2 + 1 = 6$ intentos para saber cuál llave abre cuál candado. (Son necesarios $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ intentos para de hecho abrir los candados).

3) El hexágono se parte en 6 triángulos equiláteros iguales, en uno de los cuales se encuentra el área sombreada. Dos de las líneas trazadas cortan al hexágono en ángulo de $90°$, de modo que son alturas - y por lo tanto bisectrices, medianas y mediatrices - del triángulo equilátero marcado. Si estuvieran marcadas las tres alturas, el triángulo estaría dividido en 6 pedazos iguales, de los cuales están sombreados 2. Luego, el área sombreada es $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{6}$, es decir, $\frac{1}{18}$.

4) La resta es de 1 seguido de 2018 ceros menos 2018. Si hacemos $10000 - 2018$ el resultado es 7982. Si a 10^{2018} le restamos 10000, el resultado es $999\dots990000$ donde el dígito 9 se repite exactamente 2018 veces. Luego, la suma que buscamos es $9 \times 2014 + 7 + 9 + 8 + 2 = 18152$.

5) No sabemos si el pastel se repartirá entre 7 u 8 personas. Si dividimos el pastel en 56 pedazos iguales, esto resuelve la situación: si vienen 7, cada quien recibe 8 pedazos; si vienen 8, cada quien recibe 7 pedazos. Sin embargo, los pedazos no necesariamente son iguales y eso nos da mucha libertad. Partimos el pastel en 8 pedazos iguales. Luego, el último pedazo se parte en 7 pedazos. Veamos que esta división en 14 pedazos funciona: si llegan 8 personas, cada quien recibe uno de los pedazos grandes (una persona recibirá su pedazo partido en 7 pedacitos, pero recibe lo mismo que los demás); si solo llegan 7 personas, cada quien recibe un pedazo grande y uno de los pedazos pequeños.

6) Los apretones se dan entre las personas que no se conocen entre sí: los 10 de la olimpiada saludaron a 19 personas que no conocían. Después de eso, los 4 de la cuadra saludaron a los 15 de la olimpiada (porque ya saludaron a los de la escuela). Contando de esta manera tenemos $10 \times 19 + 4 \times 15 = 190 + 60 = 250$ saludos en total.

7) Tenemos que $\angle PBA = \angle ACB = \angle ABC$ ya que el ángulo tangente es igual al ángulo inscrito. Como $\angle PBC = 66^\circ = \angle PBA + \angle ABC = 2\angle ABC$, los ángulos del triángulo miden 33°, 33° y 114°.

8) Si a fuera primo, necesitaríamos que b fuera 4 para que a^b tuviera 5 divisores. Si b fuera 4, tenemos que $b^a = 4^a = 2^{2a}$ tiene 7 divisores, de donde $2a = 6$ y $a = 3$, que es primo. Luego, $(a, b) = (3, 4)$ es una solución y $3 \times 4 = 12$ tiene 6 divisores. Si a no fuera primo, b podría ser 2 o 1. Sin embargo, ninguna potencia de 1 tiene 7 divisores y, si b fuera 2, entonces a tendría que ser 6 para que 2^a tuviera 7 divisores. Sin embargo, $6^2 = 36$ no tiene 5 divisores. Tenemos que $(3, 4)$ es la única solución.

9) Lo que buscamos es un entero de la forma abc tal que $abc + cba = 2(abc)$. Esto ocurriría solo si $cba = abc$, es decir, si $a = c$. Como a tiene 9 valores posibles (porque no puede ser 0) y, para cada uno de esos valores, b tiene 10 valores posibles, en total son $9 \times 10 = 90$ números.

10) Calculamos lado por lado. Sabemos que $AD = 2$ porque es un lado del cuadrado. También $AP = 2$ porque es un lado del triángulo equilátero APD. Como Q es el punto sobre DC y sobre la bisectriz del ángulo $\angle PAD$, el triángulo ADQ es medio triángulo equilátero, es decir, sus ángulos miden $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Si la altura mide 2, los lados $DQ = x$ y $QA = 2x$ cumplen que $4 + x^2 = 4x^2$, de donde $DQ = x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Como los triángulos ADQ y APQ son congruentes, $PQ = DQ = \frac{2}{\sqrt{3}}$. El perímetro del cuadrilátero $APQD$ es $4 + \frac{4}{\sqrt{3}}$.

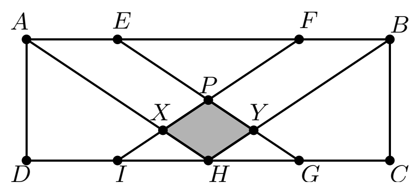
11) El número n es 35 más que un múltiplo de 2018 o un múltiplo de 2019. Luego, se puede escribir como $n = (2018 \times 2019k + 35)$. Como $3027 = 1009 \times 3, 2018 =$

$1009 \times 2, 2019 = 3 \times 673$, entonces n también es 35 más que un múltiplo de 3027 y el residuo que deja es también 35. (El menor n que cumple es, de hecho, 35).

12) Veamos que 1 y 9 cumplen. Además, es necesario que sea el cuadrado de un número impar, para que el último dígito sea impar. Para todos los mayores el dígito de la decenas será par. Consideremos los últimos dígitos ab, que son los únicos que influyen en unidades y decenas. Tenemos que $(ab)^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20(a \times b) + b^2)$. El término de en medio es siempre par, de modo que el dígito de las decenas es par siempre que si b^2 "lleva" algo, sea par. Eso se verifica fácilmente viendo que $1^2 = 1, 3^2 = 9, 5^2 = 25, 7^2 = 49$ y $9^2 = 81$.

Soluciones de los problemas de la parte B

1) Veamos que $EFGI$ es un rectángulo, de modo que sus diagonales se intersecan a la mitad de la altura, en P. Entonces $XYHI$ es un paralelogramo con $XY = \frac{1}{2}IG$.



Luego, el triángulo XYP tiene la cuarta parte de la altura y la cuarta parte de la base del rectángulo $ABCD$. Luego, su área es $\frac{1}{32}$ del área del rectángulo. Como el área del paralelogramo $XPYH$ es el doble del área del triángulo XYP, el área sombreada es $\frac{1}{16}$ del área del rectángulo $ABCD$.

2) Hay $\frac{14\times 15}{2} = 105$ parejas que cumplen la primera condición. De esas, hay 14 parejas de números consecutivos que no funcionan. Además, si a es par, la pareja $(a, a + 2)$ no sirve y son 6 parejas de ese tipo; si a es múltiplo de 3, la pareja $(a, a + 3)$ no sirve y son 4 parejas de ese tipo. Son 2 parejas $(a, a + 4)$ con a múltiplo de 4, otras 2 parejas $(a, a+5)$ con a múltiplo de 5. Es una pareja $(a, a+k)$ con a, k múltiplos de 6 o 7. Todas las demás parejas deberían funcionar, que son: $105 - 14 - 6 - 4 - 2 - 2 - 1 - 1 = 75$.

3) La rana Reneé puede pisar únicamente los lirios 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20. A cada lirio n le asignamos un número $s(n)$ que es la cantidad de maneras de llegar a ese lirio. Por las reglas del problema, $s(n) = s(n-1)+s(n-2)+s(n-3)$. (Para los primos p, $s(p) = 0$). Es fácil ver que $s(1) = s(4) = s(6) = s(8) = 1$ y que $s(14) = s(12), s(20) = s(18)$. Empezamos con $s(9) = s(8) + s(7) + s(6) = 2$. Si seguimos esta estrategia tendremos que $s(10) = 3, s(12) = 5, s(14) = 5, s(15) = 10, s(16) = 15, s(18) = 25$ y, finalmente, $s(20) = 25$.
También es posible ver que hay 5 maneras de llegar desde 1 hasta 12: 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12; 1, 4, 6, 8, 10, 12; 1, 4, 6, 8, 9, 12; 1, 4, 6, 9, 10, 12; y 1, 4, 6, 9, 12. De manera análoga, hay 5 maneras de llegar desde 12 hasta 18, pues los números 12, 14, 15, 16, 18 son 6, 8, 9, 10, 12 aumentados en 6 cada uno, respectivamente. Como solo es posible llegar a 20 desde 18, hay $5 \times 5 = 25$ caminos desde 1 hasta 20.

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2019, No. 1

2^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional

Del 9 al 12 de junio de 2018 se llevó a cabo, en Mérida, Yucatán, la 2^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) en los niveles de primaria y secundaria, con la participación de 261 estudiantes representando a 29 entidades federativas. La OMMEB está compuesta de tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria o una institución equivalente.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente.

Hay dos tipos de exámenes: individual y por equipos. El nivel I de la prueba individual constó de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Los niveles II y III de la prueba individual constaron de 15 problemas para resolver en 120 minutos. Los problemas se dividen en dos partes. La parte A consiste de 12 problemas. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre. En los tres niveles, la prueba por equipos consistió de 8 problemas, a resolver en 70 minutos.

Los ganadores de medalla de oro y medalla de plata en cada categoría, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2019.

A continuación, listamos los nombres de los alumnos que obtuvieron medalla de oro en cada nivel de la competencia.

Nombre	Estado	Nivel
Alejandro M. Roque Laparra	Chiapas	I
Mateo I. Latapí Acosta	Ciudad de México	I
Sebastián Montemayor T.	Nuevo León	I
Zizou Rueda Galindo	Oaxaca	I
Dahiana Y. Arvizu Islas	Tamaulipas	I
Diego Caballero Ricaurte	Ciudad de México	II
Fidan Garaev Garayeva	Michoacán	II
Luis E. Martínez Aguirre	Nuevo León	II
Alier Sánchez y Sánchez	Quintana Roo	II
Victor M. Bernal Ramírez	Sinaloa	II
Jacobo De Juan Millón	Yucatán	II
Leonardo M. Cervantes M.	Ciudad de México	III
Ana Illanes M. de la Vega	Ciudad de México	III
Diego A. Villarreal Grimaldo	Nuevo León	III
Samantha Ruelas Valtierra	Querétaro	III
Daniel A. Ochoa Quintero	Tamaulipas	III

A continuación, listamos los nombres de los alumnos que obtuvieron medalla de plata en cada nivel de la competencia.

Nombre	Estado	Nivel
Daniel Elías Navarrete Flores	Chihuahua	I
Javier Caram Quirós	Ciudad de México	I
Raúl E. Flores Rentería	Coahuila	I
Rodrigo Avilés Cabrera	Guanajuato	I
Said Huizar Dorantes	Guanajuato	I
Cristofer Sosa Gutiérrez	Hidalgo	I
Jaziz Cortés Camiro	Michoacán	I
Yeshua A. Wong Vargas	Morelos	I
Santiago Polendo Perini	Nuevo León	I
Carlota Ordoñez Bravo	Quintana Roo	I
Eduardo A. Esparza C.	San Luis Potosí	I
Nicolás Santana Bon	Sinaloa	I
Luis Ángel G. Jiménez Iturbide	Tabasco	I
Leticia Pérez Rodríguez	Tabasco	I
Enrique Jackson Ajuria	Yucatán	I
Juan P. Espinosa Martínez	Zacatecas	I
Carlos F. Martínez Quintero	Ciudad de México	II
Rosa V. Cantú Rodríguez	Ciudad de México	II
José R. Gutiérrez Suárez	Colima	II
Juan B. Olivares Rodríguez	Guanajuato	II
Cynthia N. López Estrada	Guanajuato	II
Omar F. Astudillo Marbán	Guerrero	II

Nombre	Estado	Nivel
Diego Ocaranza Núñez	Jalisco	II
Pedro E. Mata Castañuela	Nuevo León	II
Fernando Álvarez Ruíz	Nuevo León	II
David García Maldonado	Oaxaca	II
Valentina Acosta Bueno	San Luis Potosí	II
Tiago I. Vargas Rivera	Yucatán	II
María F. López Tuyub	Yucatán	II
Daniel Cañas Urbina	Chiapas	III
Héctor Lomelí García	Ciudad de México	III
Adrián A. García López	Jalisco	III
Gerardo Padilla González	Jalisco	III
Shubham S. Kumar Agarwal	Morelos	III
Uriel J. Hernández Guzmán	Nuevo León	III
Abel Arizpe Kisfalusi	Nuevo León	III
Mónica I. Casillas Rodríguez	Querétaro	III
Rodrigo Gaeta López	San Luis Potosí	III
Karla R. Munguía Romero	Sinaloa	III
Guillermo C. Gruintal Polanco	Yucatán	III
Marco A. Olivares Amaro	Zacatecas	III

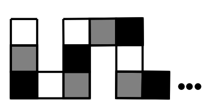
A continuación presentamos los problemas y soluciones del concurso nacional de la 2^a OMMEB.

Pruebas Individuales

Nivel I.

1) En cuatro días, seis máquinas impresoras han impreso 100 libros. ¿Cuántos días tardarán en imprimir 50 libros si solo funcionan cuatro máquinas impresoras?

2) La siguiente serpiente tiene 2018 cuadritos que se han pintado de tres colores siguiendo el patrón: blanco, gris, negro, blanco, gris, negro, etc. ¿Cuántos cuadritos grises hay?



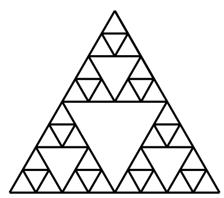
3) A un club de matemáticas asisten 37 estudiantes. Si las niñas se pueden dividir en equipos de 8 sin que sobre ninguna y los niños se pueden dividir en equipos de 7 niños sin que sobre ninguno, ¿cuántas niñas hay en el club?

4) Decimos que un número natural es *yucateco* si tiene 9 dígitos, todos son diferentes y ninguno de ellos es cero. ¿Cuál es la menor diferencia positiva posible entre dos números yucatecos?

5) Mary tiene sus ahorros en una alcancía y decide gastarlos de la siguiente manera: El primer día gasta 20 pesos, el segundo gasta 21 pesos, el tercero 22 pesos, el cuarto 23 pesos y así sucesivamente, de tal modo que cada día gasta un peso más que el día anterior. El día 18 al ir a sacar sus monedas, se da cuenta que tiene en su alcancía exactamente un peso más que lo que gastó el día anterior, ¿cuánto tenía ahorrado Mary?

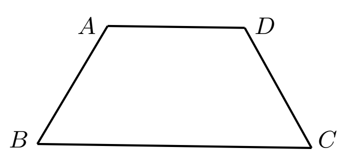
6) Un entero positivo n se dice que es *maya* si en la siguiente lista de números enteros consecutivos $101, 102, 103, \ldots, 200$, hay exactamente un múltiplo de n. Encuentra el número maya más pequeño.

7) La siguiente figura se construyó con palillos de madera de la misma longitud. Si el perímetro del triángulo mayor es 96 cm, ¿cuál es la suma de las longitudes, en cm, de todos los palillos usados?



8) La fracción $\frac{2}{8}$ es equivalente a $\frac{1}{4}$, y cuando agregas 1 tanto al numerador como al denominador de $\frac{2}{8}$ obtienes $\frac{3}{9}$, que es equivalente a $\frac{1}{3}$. Encuentra una fracción que sea equivalente a $\frac{1}{8}$, de manera que cuando agregues 1 al numerador y al denominador de tu fracción, obtengas una fracción equivalente a $\frac{1}{7}$.

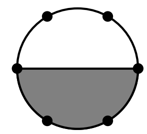
9) Considera un trapecio $ABCD$, con los lados BC y DA paralelos y con $CD = DA = AB = \frac{1}{2}BC$. Encuentra la medida en grados del ángulo $\angle CAB$.



10) Si un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro y el área del hexágono es de 120 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo?

11) En una pared está escrita la palabra YUCATAN con letras de metal. Al menos una de las letras se cayó, pero no se cayeron todas. ¿Cuántas palabras distintas pueden haber quedado escritas en la pared, sin considerar los espacios vacíos? Por ejemplo, si se cayeron la C y la T, queda YUAAN.

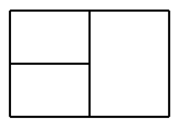
12) Un círculo se colorea de gris y blanco, y sobre la circunferencia están marcados 6 puntos, como se indica en la figura.



Decimos que un cuadrilátero es *bicolor* si su interior tiene una parte blanca y una parte gris. ¿Cuántos cuadriláteros bicolor tienen sus cuatro vértices en los puntos marcados?

13) En un baile de la escuela, cada alumno bailó con 3 alumnas y cada alumna bailó con 6 alumnos. Si al baile asistieron 90 personas entre alumnas y alumnos, ¿cuántos alumnos fueron al baile?

14) Un rectángulo se divide en tres rectángulos más pequeños como se muestra en la figura. Cada uno de los rectángulos más pequeños cumple que sus lados están en la misma proporción que los lados del rectángulo grande. En cada uno de los cuatro rectángulos, ¿cuál es la razón de la longitud del lado más grande entre la longitud del lado más pequeño?

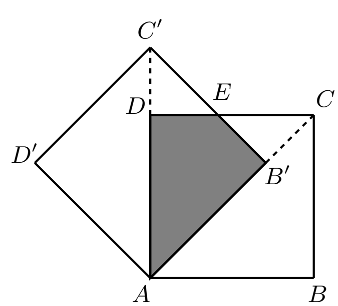


15) Hugo escribe en su libreta exactamente una vez cada uno de los números de la forma $1\pm2\pm3\pm4\pm\cdots\pm10$. Por ejemplo, uno de ellos es $1-2+3+4-5-6-7-8+9-10$. Encuentra la suma de todos estos números.

Nivel II. Parte A.

1) ¿Cuántos números primos dividen a $73^2 - 31^2 - 91$?

2) La siguiente figura se formó con dos cuadrados de lado 1 cm, el $ABCD$ y el $AB'C'D'$, de manera que AB' está sobre la diagonal AC. Sea E el punto de intersección de $B'C'$ con CD.



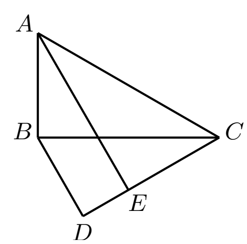
Encuentra el área, en cm^2, del cuadrilátero $AB'ED$.

3) Coincide con el Problema 13 del Nivel I.

4) Coincide con el Problema 14 del Nivel I.

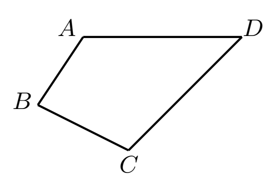
5) Isaac y Alfredo juegan a lanzar dados de la siguiente manera. Isaac lanza un dado y apunta el número que salió en su libreta, luego vuelve a lanzar el dado y apunta el número que le salió a la derecha del número que ya había escrito, formando así un número de 2 dígitos. Luego, Alfredo hace lo mismo que hizo Isaac. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de Alfredo sea mayor que el número de Isaac?

6) Sean ABC un triángulo rectángulo con $\angle ABC = 90°$, D un punto que cumple que BDC y ABC son triángulos semejantes, además A y D están en lados opuestos de BC. El punto E sobre CD cumple que los ángulos $\angle CAE$ y $\angle EAB$ son iguales. Si AE es paralelo a BD, ¿cuánto mide (en grados) el ángulo $\angle CAB$?



7) Coincide con el Problema 10 del Nivel I.

8) Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 13$ cm y $AD = 12$ cm. Si $\angle ABC$ es recto, calcula el área, en cm^2, de $ABCD$.



9) En una escuela hay 8 alumnos que desean formar equipos de tres. ¿Cuántos equipos se pueden formar si se permite que dos equipos tengan a lo más un alumno en común?

10) En una competencia internacional de matemáticas, el $28\,\%$ de los concursantes son de Asia, el $10\,\%$ de Oceanía. Los concursantes de África junto con los de Europa son el $40\,\%$ del total, además Asia tiene 66 alumnos más que los alumnos de África y entre alumnos de Europa y de Oceanía hay 187 alumnos. ¿Cuántos concursantes europeos participaron?

11) Sea $ABCD$ un rectángulo con diagonal AC, sea Q un punto sobre BC tal que $\angle BAQ = \angle QAD$ y $\angle QAC = 15°$. Encuentra la medida en grados del ángulo $\angle BOQ$, donde O es el punto medio de AC.

12) Encuentra el mayor entero positivo n, tal que $n^2 + 2018n$ sea un cuadrado perfecto.

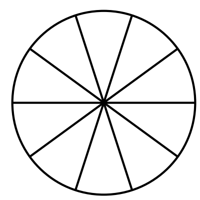
Nivel II. Parte B.

1) Muestra que el siguiente número

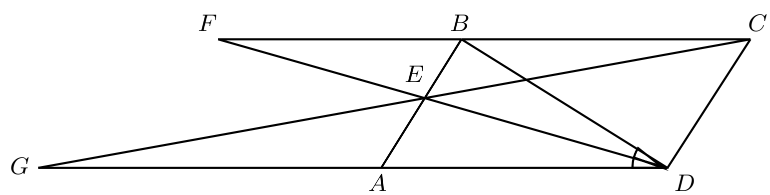
$$\frac{4}{3}+\frac{6}{5}+\frac{8}{7}+\cdots+\frac{102}{101},$$

no es un número entero.

2) En cada una de las 10 regiones en que se ha dividido el círculo de la figura se colocan 3 fichas. Un movimiento consiste en mover una ficha a una región vecina (es decir, a una región que comparte un radio). ¿Es posible que después de 2018 movimientos todas las fichas se encuentren en la misma región? Justifica tu respuesta.



3) Sea $ABCD$ un paralelogramo y sean E un punto sobre AB tal que los ángulos $\angle ADE$ y $\angle EDB$ son iguales, F la intersección de DE con BC y G la intersección de AD con CE. Muestra que $BC^2 = BF \cdot AG$.



Nivel III. Parte A.

1) Coincide con el Problema 5 del Nivel II.

2) Coincide con el Problema 8 del Nivel II.

3) Coincide con el Problema 9 del Nivel II.

4) Coincide con el Problema 10 del Nivel II.

5) Coincide con el Problema 11 del Nivel II.

6) Coincide con el Problema 12 del Nivel II.

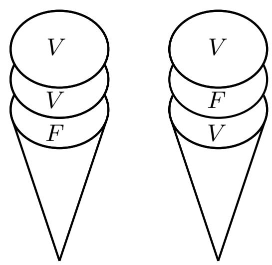
7) La colección de números a_n se define como sigue:

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{2+3a_n}, \text{ para } n \geq 1.$$

Encuentra el valor numérico de a_{67}.

8) Sea ABC un triángulo isósceles cuyo ángulo en A mide $24°$, siendo este el ángulo desigual. Un punto D en la circunferencia de centro C y radio AC es tal que BD interseca al segmento AC. La perpendicular a BC por D corta a la circunferencia en E. Encuentra $\angle ADB + \angle BEA$.

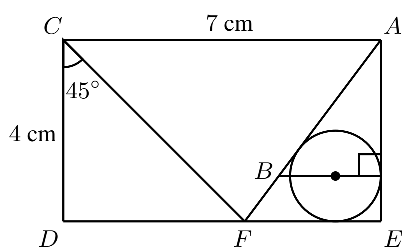
9) Lupita quiere invitarle un helado a cada uno de sus amigos Hugo, Ricardo y Deeds. Para ello tiene tres conos y 7 bolas de helado para repartir: 2 de chocolate, 2 de vainilla, 2 de fresa y 1 de limón. ¿De cuántas maneras puede formar y repartir los helados, si usa las 7 bolas y cada uno de sus amigos debe tener un número distinto (positivo) de bolas en su helado? Nota: Las bolas del mismo sabor son idénticas entre sí, pero el orden en que se distribuyen las bolas en un cono sí importa. Por ejemplo, los siguientes dos helados son distintos.



10) Sea P un polígono regular de n lados y vértices $V_1, V_2, \ldots, V_n$, y sea O su centro. Determina todos los posibles valores de n para que la bisectriz de $\angle V_2V_1O$ pase por V_3.

11) Una lancha cuando se desplaza en un río tranquilo va a 9 km/h. Un día que había corriente en el río, José recorrió un kilómetro de ida y un kilómetro de regreso en 15 minutos. ¿Cuál era la velocidad, en km/h, de la corriente del río ese día?

12) En la siguiente figura, $ACDE$ es un rectángulo y se han dibujado la circunferencia inscrita al triángulo AFE y su diámetro paralelo al lado FE. Encuentra la longitud, en cm, de AB.



Nivel III. Parte B.

1) Coincide con el Problema 2 del Nivel II, Parte B.

2) Ana tiene cuatro hermanas: Berta, Ceci, Diana y Elena. Su edad actual es un número impar menor que 30. Cuando Berta tenga el triple de la edad actual de Ana, se cumplirán las siguientes relaciones:

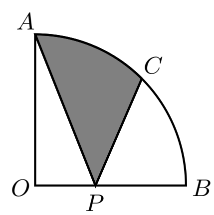
   a) La suma de las edades que tendrán en ese entonces Ana y Ceci será igual a la suma de las edades actuales de todas las hermanas.

   b) La edad de Diana será el triple de su edad actual.

   c) La edad de Elena será un año más que el doble de la edad actual de Berta.

   Halla la suma de las edades de Ana y Berta.

3) En la figura, el sector AOB representa una cuarta parte de un círculo de radio $r = 1$ y el punto C satisface que $\angle BOC = 45°$. Sea P un punto sobre el segmento OB (distinto de O y de B). Se trazan los segmentos AP y CP para formar la región sombreada. Demuestra que el área de la región sombreada es menor que el área de la región sin sombrear.

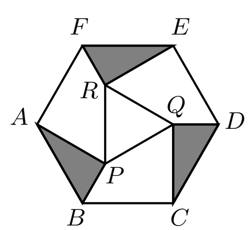


Pruebas por Equipos

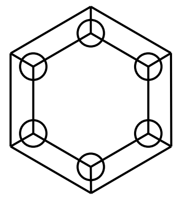
Nivel I.

1) Ordena los siguientes números de menor a mayor: 3^6, 4^5, 5^4, 6^3.

2) En un hexágono regular $ABCDEF$ de área 1 cm^2, se han trazado en su interior tres triángulos congruentes ABP, CDQ y EFR con ángulos de $30°$, $60°$ y $90°$, los ángulos rectos en P, Q, R, como se muestra en la figura. Encuentra el área, en cm^2, del triángulo PQR.



3) Se acomodan 7 de los números del 1 al 8 en las caras de la siguiente figura, de forma que para cada tres caras que se toquen en un mismo círculo la suma de los números en tales caras sea un múltiplo de 3. ¿Cuáles números podrían sobrar en estos tipos de acomodos?



4) Sergio y Zael quieren ir a una heladería a comprar un tipo de helado cada día de la semana. Dentro de los artículos que se venden se encuentran los siguientes: paletas, raspados y sandwich de nieve. Además, de cada uno de los artículos hay 4 sabores: vainilla, fresa, chocolate y limón. Sergio quiere comprar un artículo de chocolate por día de manera que no coma lo mismo dos días seguidos, mientras que Zael quiere comprar paletas de distintos sabores sin comer dos días seguidos el mismo sabor. ¿Quién de los dos tiene más formas distintas de comprar a lo largo de toda la semana? Justifica tu respuesta.

5) Alguien cambió las etiquetas de los números de la calculadora de César. Los números deberían estar en la posición que muestra la imagen de la izquierda, pero sus posiciones fueron cambiadas a como se muestra en la imagen de la derecha.

7	8	9
4	5	6
1	2	3

9	8	7
6	5	4
3	2	1

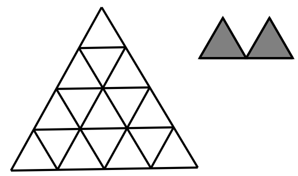
Como consecuencia de esto, cuando César aprieta el número 1, la calculadora registra el número 3 y al revés. Lo mismo pasa con el 4 y con el 6 y con el 7 y el 9. ¿Cuántas multiplicaciones distintas de dos números de un solo dígito, darán un resultado incorrecto cuando César utilice su calculadora? (Nota: las multiplicaciones 1×2 y 2×1 son consideradas multiplicaciones diferentes).

6) Encuentra el entero positivo más pequeño de seis dígitos, que cumpla que la suma de sus seis dígitos sea igual al producto de sus dígitos.

7) Acomoda ocho números enteros diferentes en los cuadritos que faltan, de manera que los productos de los tres números de cada renglón, de cada columna y de cada diagonal sean iguales.

	6	

8) Se quiere acomodar 8 piezas como las de las derecha (las puedes rotar de ser necesario) de manera que se cubra toda la figura de la izquierda. ¿Cuántos acomodos diferentes se pueden hacer?



Nivel II.

1) Coincide con el Problema 3 del Nivel I.

2) Coincide con el Problema 6 del Nivel I.

3) Encuentra todas las parejas de números reales (x, y) que cumplen las siguientes dos igualdades: $x^3 + y^3 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$.

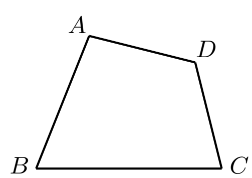
4) Encuentra todas las parejas de enteros positivos (a, r) tales que el número $N = a^2 + (a+r)^2 + (a+2r)^2 + (a+3r)^2 + (a+4r)^2$ tenga todos sus dígitos iguales.

5) Un triángulo ABC con vértices sobre una circunferencia de centro O tiene la siguiente propiedad: si O, C' son simétricos con respecto a C, se cumple que $\angle CC'A = \angle ABC$. Encuentra el valor (en grados) del ángulo $\angle ABC$.

6) Coincide con el Problema 8 del Nivel I.

7) Los números *creativos* son números de 4 dígitos $abcd$ tales que los números de dos dgitos ab y cd son ambos pares. Además, la suma de sus dígitos es un número primo. Por ejemplo, 2018 es número creativo, ya que $ab = 20$ y $cd = 18$ son números pares de dos dígitos y la suma $2 + 0 + 1 + 8 = 11$ es un número primo. ¿Cuántos números creativos menores o iguales que 2018 hay?

8) Sea $ABCD$ un cuadrilátero, como se indica en la figura. Muestra que si los cuatro triángulos ABC, BCD, CDA, DAB, tienen el mismo perímetro, entonces $ABCD$ es un rectángulo.



Nivel III.

1) Sea $A = \{2, 5, 8, 11, \ldots, 2018\}$, cada número, a partir del segundo, es el anterior más 3. Determina el mínimo valor k tal que si escogemos k números del conjunto A, necesariamente hay dos distintos cuya suma sea 2020.

2) Todos los números impares se dividen en grupos como se indica:

$$\{1\},\ \{3,5\},\ \{7,9,11\},\ \{13,15,17,19\},\ \ldots.$$

¿Cuál es la suma de los elementos del décimo grupo?

3) Coincide con el Problema 5 del Nivel II.

4) Coincide con el Problema 4 del Nivel II.

5) Coincide con el Problema 7 del Nivel II.

6) Coincide con el Problema 8 del Nivel II.

7) Consideramos un tablero de 8×8. El *Batab* es una pieza que puede moverse de una casilla a otra vecina (que comparte un lado). Un *camino del Mayab* es un camino que va de una casilla inicial a una final tal que:

   a) Consta exclusivamente de movimientos del Batab.

   b) En cada paso se aleja del punto inicial y se acerca al punto final.

   Se coloca una ficha verde en una casilla y una ficha naranja en otra distinta, luego se coloca una ficha blanca en una casilla que está dentro de un camino del Mayab que va de la ficha verde a la ficha naranja. Llamamos T al número total de caminos del Mayab que van de la ficha verde a la naranja pasando por la ficha blanca. Encuentra el número total de formas distintas en que se pueden colocar las tres fichas de modo que 49 divida a T.

8) Los gemelos Adán y Beto van de su casa a la escuela. Adán, corre la mitad del trayecto y camina la otra mitad, mientras que Beto corre la mitad del tiempo y camina la otra mitad del tiempo. Los dos corren a una misma velocidad v_1 y los dos caminan a una misma velocidad v_2. ¿Quién de ellos llega primero? Justifica tu respuesta.

Soluciones de las Pruebas Individuales

Nivel I.

1) Tenemos que en 4 días 6 impresoras hacen 100 libros, por lo que en un día 6 impresoras hacen $\frac{100}{4} = 25$ libros. Luego, en un día una impresora hace $\frac{25}{6}$ libros. De donde en un día 4 impresoras hacen $4 \cdot \frac{25}{6} = \frac{50}{3}$ libros. Así que en tres días 4 impresoras hacen $3 \cdot \frac{50}{3} = 50$ libros.

2) Cada tres cuadritos hay exactamente un cuadrito gris. Como $2018 = 672 \cdot 3 + 2$ entonces tenemos un total de $672 + 1 = 673$ cuadritos grises.

3) El número de niñas en el club debe ser un múltiplo de 8, es decir uno de los números en la lista: 8, 16, 24, 32. De igual manera, el número de niños en el club debe ser un múltiplo de 7, es decir uno de los números en la lista: 7, 14, 21, 28, 35. Como debe haber en total 37 estudiantes, debemos buscar dos números, uno en cada lista, de tal forma que sumen 37. Esto se logra con 16 y 21. Por lo que hay 16 niñas en el club.

4) Sean a y b números yucatecos, con $a > b$. Entonces para hacer la diferencia $a-b$ lo menor posible, lo mejor sería que fueran diferentes únicamente en el número de las unidades, pero esto no es posible. Así que estamos buscando números a y b que solo difieran en los dígitos de las unidades y decenas, ya que la diferencia entre esos dos números sería igual a la diferencia entre los números formados por los dígitos de sus decenas y los dígitos de sus unidades. Un ejemplo de esto sería tomar los números 32 y 23, y formar los números $a = 987654132$ y $b = 987654123$ de manera que $a - b = 32 - 23 = 9$. Ahora debemos asegurarnos que este es el mínimo. Para esto observamos que la suma de los dígitos de cualquier número yucateco es igual a 45, por lo que a y b son ambos múltiplos de 9. Entonces, su diferencia $a - b$ deberá ser un múltiplo de 9, sin embargo como $a \neq b$, tenemos que $a - b \neq 0$. Por lo que el mínimo valor que puede tomar $a - b$ es 9.

5) El primer día gasta $19+1$ pesos, el segundo día $19+2$ y así, el día 17 gasta $19+17$ y el día 18 le quedan $19 + 18$ pesos, que se los gasta. Entonces tiene originalmente $(19+1)+(19+2)+(19+3)+\cdots+(19+18) = 19\cdot 18 + \frac{19\cdot 18}{2} = 513$ pesos.

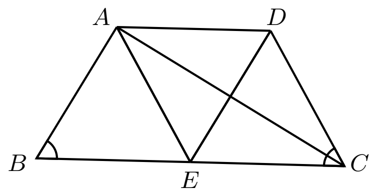
6) Notemos que todos los números de la lista $1, 2, 3, \ldots, 50$ tienen al menos tres múltiplos entre 101 y 200, y por tanto no son números mayas. De manera similar, los números de la lista $51, 52, \ldots, 100$ al multiplicarlos por 2 caen entre 101 y 200. Por tanto, todos ellos tienen al menos un múltiplo en la lista. Como $66 \cdot 3 = 198$, entonces todos los números del 51 al 66 tienen al menos dos múltiplos en la lista y por tanto no son números mayas. Dado que $67 \cdot 3 = 201$, podemos concluir que el único múltiplo de 67 entre 101 y 200 es $67 \times 2 = 114$. Así, concluimos que 67 es el número maya más pequeño.

7) El perímetro del triángulo mayor es 96 cm y está formado por 24 palillos que son lados de los triángulos más pequeños. Por lo tanto cada palillo pequeño mide 4 cm. De ahí podemos obtener que el perímetro de cada triángulo pequeño es 12 cm. Si contamos los triángulos pequeños podemos ver que son 27, por lo que la longitud total de los palillos es $27 \times 12 = 324$ cm.
Otra forma: En la figura hay 4 tamaños de triángulos. El más grande tiene perímetro 96 cm, los siguientes disminuyen en tamaño a la mitad, así tendrán perímetros 48 cm, 24 cm y 12 cm, respectivamente. Del grande al menor hay 1, 1, 3 y 9 triángulos de cada tamaño. Luego, la suma de los perímetros es $96+48+3\cdot 24+9\cdot 12 = 324$ cm.

8) Necesitamos que al sumar 1, el denominador sea múltiplo de 7, así que el primer candidato posible es la fracción equivalente a $\frac{1}{8}$ que tiene numerador 6, esto es $\frac{6}{48}$. Probamos con este candidato y podemos ver que al sumar 1 al numerador y al denominador obtenemos la fracción $\frac{7}{49}$, que al ser simplificada es $\frac{1}{7}$.

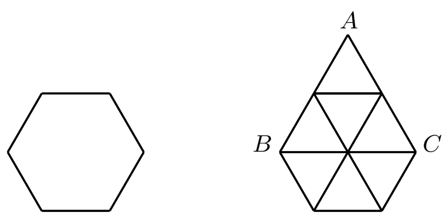
Otra forma: Buscamos a y b tales que $\frac{a}{b} = \frac{1}{8}$ y $\frac{a+1}{b+1} = \frac{1}{7}$. Esto es equivalente al sistema $8a = b$ y $7a + 7 = b + 1$, cuyas soluciones son $a = 6$ y $b = 8 \cdot 6 = 48$.

9) Si E es el punto medio de BC, se tiene que $BE = EC = AD$. Luego, AD y EC son segmentos paralelos y de la misma longitud, por lo que $CDAE$ es un paralelogramo y como tiene tres lados iguales entonces es un rombo.



Además, el triángulo ABE es equilátero y entonces $\angle ABE = 60° = \angle DCE$. Como CA es bisectriz de $\angle DCE$ (pues los triángulos ADC y CEA son congruentes), se tiene que $\angle ACE = 30°$, por lo que $\angle CAB = 90°$.

10) Consideremos la siguiente figura y notemos que el triángulo ABC tiene el mismo perímetro que el hexágono. Más aún, el área del triángulo es $\frac{4}{6}$ del área del hexágono. Por lo tanto, Área $(ABC) = \frac{4}{6} \cdot 120 = 80$ cm^2.



11) La palabra YUCATAN tiene siete letras, de modo que podemos escoger de $2^7 - 2$ formas los distintos conjuntos de letras que pudieron haber quedado. Sin embargo, algunas palabras están representadas por dos de estos conjuntos. Estas palabras son las que contienen exactamente una A y no tienen la letra T; esto es, las que podemos formar con una A y las letras YUCN. Restando las repetidas, entonces el resultado es $(2^7 - 2) - 2^4 = 110$.
Otra forma. Hay tres tipos de palabras que pueden quedar escritas. Las que no tienen letra A, las que tienen exactamente una letra A y las que tiene dos letras A. Con dos letras A, hay $2^5 - 1$ palabras, ya que las otras letras están o no, y una menos porque no quedaron todas las letras. Además. hay $2^5 - 1$ palabras que no tienen letra A: las otras 5 letras pueden o no estar y una menos que corresponde al caso en que se cayeron todas las letras. Con exactamente una A y sin la letra T, hay $2^4 = 16$, con la letra T y con la A antes de la T hay también $2^4 = 16$ y con la letra T y con A después de la T, hay $2^4 = 16$. Por lo tanto, hay en total $(2^5 - 1) + (2^5 - 1) + 16 + 16 + 16 = 110$ palabras.

12) En total hay $\binom{6}{4}$ cuadriláteros con vértices sobre los puntos marcados. De estos, uno tiene solo puntos blancos en su interior y otro tiene solo puntos grises. De tal modo, hay $\binom{6}{4} - 2 = 15 - 2 = 13$ cuadriláteros bicolores.

13) Si hay A alumnos, entonces hubo $3A$ parejas que se formaron para bailar, y si B es el número de alumnas, se formaron $6B$ parejas de baile. Como $3A = 6B$, se tiene que $A = 2B$ y como $A + B = 90$, se tiene que $A = 60$ y $B = 30$.

14) Supongamos que la longitud de los lados mayores de los rectángulos más pequeños es igual a y y la longitud de sus lados menores es x, mientras que la longitud del lado menor del rectágulo mediano es igual a a y su lado mayor vale $2x$. Como los lados de los rectángulos pequeños y grande, están en la misma proporción tenemos que $\frac{y}{x} = \frac{a+y}{2x}$. Por lo tanto, $\frac{2y}{2x} = \frac{a+y}{2x}$, de donde se concluye que $a = y$. Finalmente, como el rectángulo pequeño y el rectángulo mediano tienen la misma proporción se obtiene que $\frac{y}{x} = \frac{2x}{y} = \frac{2}{y/x}$, por lo que $(\frac{y}{x})^2 = 2$ y $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$.

15) En cada uno de los números que escribe Hugo, el 1 que aparece al principio siempre es positivo. Para cada elección de signos podemos considerar la elección de signos opuesta y al sumar estos números el resultado será $1 + 1 = 2$. Como hay 2^9 elecciones de signos que se agrupan por pares y como cada par suma 2, se tendrá que la suma es $2 \cdot (2^9/2) = 2^9$.

Nivel II. Parte A.

1) Notemos que

$$\begin{aligned} 73^2 - 31^2 - 91 &= (73+31)(73-31) - 91 = (2^3 \cdot 13)(2 \cdot 3 \cdot 7) - 7 \cdot 13 \\ &= 7 \cdot 13(2^4 \cdot 3 - 1) = 7 \cdot 13 \cdot 47. \end{aligned}$$

Por lo tanto, son 3 primos los que dividen a $73^2 - 31^2 - 91$.

2) Notemos que $AB'ED$ es un cuadrilátero con $\angle B' = \angle D = 90°$, además $AB' = AD = 1$ y $DE = EB' = \sqrt{2} - 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \text{Área}(AB'ED) &= \text{Área}(ADE) + \text{Área}(AB'E) \\ &= 2\text{Área}(AB'E) = 2\frac{AB' \cdot EB'}{2} = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}. \end{aligned}$$

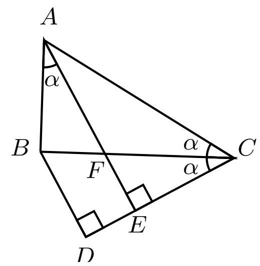
3) Coincide con la solución del Problema 13 del Nivel I.

4) Coincide con la solución del Problema 14 del Nivel I.

5) Como un dado tiene 6 números, en total se pueden formar $6 \times 6 = 6^2$ números de dos cifras. Por lo tanto, el total de casos (tomando en cuenta tanto los tiros de Isaac como de Alfredo) es $6^2 \times 6^2 = 6^4$. Por otro lado, notemos que en 6^2 casos Isaac y Alfredo obtienen los mismos resultados. Luego, en $6^4 - 6^2$ casos los resultados son distintos y, de ellos, la mitad corresponden al caso en que el número de Alfredo es mayor. Por lo tanto, la probabilidad buscada es igual a $\frac{(6^4-6^2)/2}{6^4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} = \frac{35}{72}$.

6) Como AE es paralelo a BD, el triángulo AEC es rectángulo. Si F es la intersección de AE con BC, se tiene que los triángulos rectángulos ABF y CEF son

semejantes por tener ángulos en F iguales por ser opuestos por el vértice. Luego, $\alpha = \angle BAE = \angle BAF = \angle FCE = \angle BCE$ y como $\triangle BDC \sim \triangle ABC$, entonces $\alpha = \angle BCE = \angle BCA$. De lo anterior tenemos que $2\alpha = \angle BAC$ y $\alpha = \angle BCA$. Por lo tanto, $\alpha = 30°$ y $\angle CAB = 60°$.



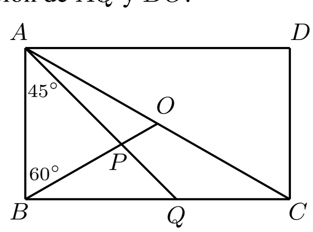
7) Coincide con la solución del Problema 10 del Nivel I.

8) Por el teorema de Pitágoras, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$. Por otro lado, notemos que $AD^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2 = DC^2$. Entonces, por el recíproco del teorema de Pitágoras tenemos que ADC es un triángulo rectángulo y $\angle DAC$ es recto. Por lo tanto, $[ABCD] = [ABC] + [ADC] = 3 \cdot \frac{4}{2} + 5 \cdot \frac{12}{2} = 36$ cm^2.

9) Si $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ son los alumnos, se pueden formar 8 equipos así: $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 5)$, $(1, 6, 7)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 5, 8)$, $(3, 4, 8)$, $(3, 5, 7)$, $(6, 7, 8)$.
Si $A_1, \ldots, A_n$ son los equipos, entonces $|A_j| = 3$ con $1 \leq j \leq 8$ y $|A_i \cap A_j| \leq 1$ si $i \neq j$. Si existe a que esté en cuatro distintas A_i y como solo hay un alumno común en dos equipos, los otros 8 alumnos que se necesitan para los 4 equipos deben ser diferentes, por lo que deberá haber al menos $1 + 2 \cdot 4 = 9$ alumnos, lo cual no es posible. Por lo que un alumno pertenecerá a lo más a 3 equipos. Luego, con los 8 alumnos podemos formar a lo más $\frac{8 \cdot 3}{3}$ equipos, es decir, el número n de equipos debe cumplir que $n \leq \frac{8 \cdot 3}{3} = 8$.

10) Sea T el total de concursantes. De Asia hay $A = \frac{28}{100}T$, de Oceanía hay $O = \frac{10}{100}T$ y entre africanos y europeos hay $Af + E = \frac{40}{100}T$. También se tiene que $A = Af + 66$ y $E + O = 187$, por lo que $\frac{40}{100}T = Af + E = (A - 66) + (187 - O) = \frac{28}{100}T - 66 + 187 - \frac{10}{100}T$. Luego, $\frac{40}{100}T = \frac{18}{100}T + 121$, de donde $T = \frac{1}{22}(12100) = 550$. Así, a la competencia asistieron 550 alumnos. De Oceanía asistieron 55 alumnos que corresponden al $10\,\%$ y, como $E + O = 187$, se tiene que de Europa asistieron $187 - 55 = 132$ competidores.

11) Denotemos por P a la intersección de AQ y BO.



Como $\angle BAQ = 45°$ y $\angle QAC = 15°$ se tiene que $\angle BAO = 60°$ y como O es punto de intersección de las diagonales, $\angle OBC = \angle BCO = \angle OAD = 30°$, luego $\angle ABO = 60°$, por lo que el triángulo ABO es equilátero. Luego, $\angle APB = 180° - 60° - 45° = 75°$.
Como ABQ es un triángulo rectángulo isósceles con $AB = BQ$ y como ABO es equilátero, se tiene que $BO = AB = BQ$. Luego, OBQ es isósceles y como $\angle OBQ = 30°$ se tiene que $\angle BOQ = \angle BQO = 75°$.

12) Sea m tal que $n^2 + 2018n = (n+m)^2$. Desarrollando y simplificando obtenemos que $n = \frac{m^2}{2018-2m}$. Notemos que se trata de una función creciente en m para $1 \leq m \leq 1008$. Además la expresión no está definida para $m = 1009$ y $n < 0$ si $m \geq 1010$. Así que el máximo se alcanza en $m = 1008$. Entonces, $n = \frac{1008^2}{2}$.

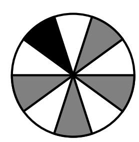
Nivel II. Parte B.

1) Notemos que

$$N = \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \cdots + \frac{102}{101} = (\frac{3}{3} + \frac{5}{5} + \cdots + \frac{101}{101}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{101}) = 50 + B$$

Por lo tanto, N es un número entero si y solo si el número $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{101}$ es entero. Sea $C = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot 99$. Es claro que si B es entero, entonces BC es entero. Pero, $BC = \frac{C}{3} + \frac{C}{5} + \cdots + \frac{C}{99} + \frac{C}{101}$ es entero si y solo si $\frac{C}{101}$ es entero, pero esto último es falso ya que 101 es primo y en la factorización en primos de C el número 101 no está presente.

2) La respuesta es no. Supongamos que sí es posible hacerlo, y pintemos de negro la región correspondiente. Coloreamos las nueve regiones restantes alternadamente de gris y blanco como se muestra en la figura.



Observamos que si una ficha se encuentra en una región pintada de blanco, entonces requirirá de un número impar de movimientos para llegar a la región roja, en tanto que una ficha ubicada en una región gris ocupará un número par de movimientos. De ese modo, hay $3 \times 5 = 15$ fichas que requerirán cada una un número impar de movimientos para llegar a la región negra, haciendo un total impar de movimientos. Por otro lado, las fichas de las casillas grises requieren un total par de movimientos. Así, el número de movimientos para llegar a la configuración deseada debe ser necesariamente impar y, por lo tanto, no puede ser 2018.

3) Notemos que los triángulos BCE y AGE son semejantes, al igual que los triángulos BEF y AED, por lo que, $\frac{BC}{AG} = \frac{BE}{AE}$ y $\frac{BE}{AE} = \frac{BF}{AD}$. Luego, $BC \cdot AD = BF \cdot AG$ y, como $AD = BC$, se tiene que $BC^2 = BF \cdot AG$.

Nivel III. Parte A.

1) Coincide con la solución del Problema 5 del Nivel II.

2) Coincide con la solución del Problema 8 del Nivel II.

3) Coincide con la solución del Problema 9 del Nivel II.

4) Coincide con la solución del Problema 10 del Nivel II.

5) Coincide con la solución del Problema 11 del Nivel II.

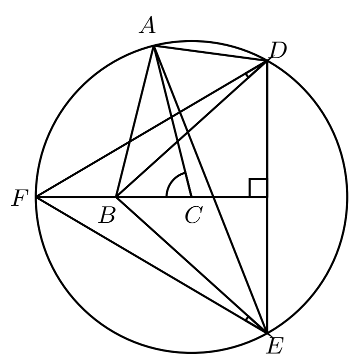
6) Coincide con la solución del Problema 12 del Nivel II.

7) La fórmula de recursión se reescribe así

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2+3a_n}{2a_n} = \frac{1}{a_n} + \frac{3}{2}.$$

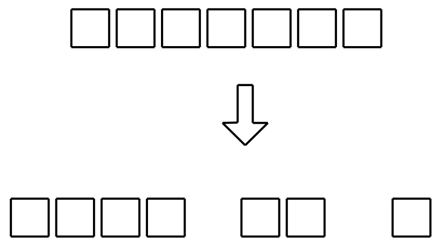
Si $b_n = \frac{1}{a_n}$, entonces $b_{n+1} = b_n + \frac{3}{2} = b_{n-1} + \frac{3}{2} \cdot 2 = \cdots = b_1 + \frac{3}{2} \cdot n$. Luego, $b_{67} = b_1 + \frac{3}{2}66 = 1 + 3(33) = 100$ por lo que $a_{67} = \frac{1}{100}$.

8) La recta BC corta a la circunferencia en F con B entre F y C. Notemos que el triángulo FDE es isósceles y, por lo tanto, $\angle FDB = \angle FEB$.



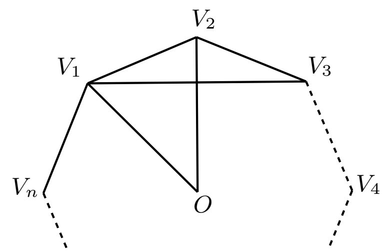
Luego, $\angle ADB + \angle BEA = \angle ADB - \angle FDB + \angle BEA + \angle FEB = \angle ADF + \angle AEF = 2\angle ADF = \angle ACF = \frac{180° - 24°}{2} = 78°$.

9) Primero, notemos que las diferentes formas de escribir a 7 como la suma de tres enteros positivos son: $5+1+1$, $4+2+1$, $3+3+1$ y $3+2+2$. De estas, la única que tiene tres sumandos distintos es $4+2+1$. Si ponemos todas las bolas de helado juntas se forma una "palabra" de longitud 7 con dos C's, dos V's, dos F's y una L. Usando permutaciones con repetición vemos que hay $\frac{7!}{2!2!2!1} = 630$ de estas palabras. Ahora bien, una palabra da origen a una forma de hacer 3 helados, simplemente dividiéndola en segmentos de longitud 4, 2 y 1 (ver figura).



Finalmente, solo basta permutar estos helados entre Hugo, Ricardo y Deeds para obtener todas las formas requeridas. La respuesta es $3! \times 630 = 3780$.

10) Por ser P regular, el ángulo interno $\angle V_2V_1V_n$ mide, en grados, $\frac{(n-2)180°}{n}$.

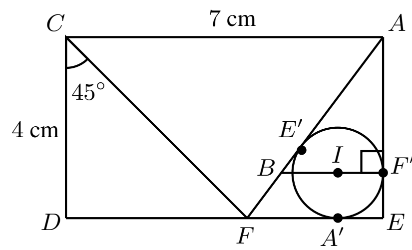


Como V_1O es la bisectriz de $\angle V_2V_1V_n$, se tiene que $\angle V_2V_1O = \frac{(n-2)90°}{n}$. Por la hipótesis se tiene que $\angle V_2V_1V_3 = \frac{1}{2}\angle V_2V_1O = \frac{(n-2)45}{n}$. Como el segmento V_1V_3 es perpendicular al segmento V_2O, y $\angle V_2OV_1 = \frac{360°}{n}$, por ser ángulo central; $\angle OV_1V_3 + \angle V_2OV_1 = 90°$. Sustituimos por los valores de $\angle OV_1V_3$ y $\angle V_2OV_1$, esto es, $\frac{(n-2)45°}{n} + \frac{360°}{n} = 90°$. Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{n}{45}$ se llega a $(n-2) + 8 = 2n$, con lo cual $n = 6$.
Otra forma. Consideremos el cuadrilátero $OV_1V_2V_3$ que se forma de unir los dos triángulos isósceles congruentes OV_1V_2 y OV_2V_3 . Es claro que OV_2 es perpendicular a V_1V_3 y que los triángulos $V_1V_2V_3$ y OV_1V_3 son triángulos isósceles. Sea P la intersección de OV_2 y V_1V_3, los cuatro triángulos PV_1V_2, PV_3V_2, PV_3O, PV_1O, son congruentes (por criterio ALA). Luego, $OV_1V_2V_3$ es un rombo y en consecuencia OV_1V_2 es un triángulo equilátero, por lo que $\angle V_1OV_2 = 60°$. Pero por otro lado, $\angle V_1OV_2 = \frac{360}{n}$, por ser ángulo central del polígono regular de n lados. Igualando los valores de $\angle V_1OV_2$ obtenemos que $n = 6$.

11) Si v es la velocidad de la corriente, la lancha avanza a $(9 + v)$ km/h cuando va a favor de la corriente y a $(9 - v)$ km/h cuando va en contra de la corriente. Si t_1 es el tiempo que tarda cuando va con la corriente a su favor, entonces se cumple que $(9 + v)t_1 = 1$. Y si t_2 es el tiempo que tarda en recorrer el kilómetro cuando va contra corriente entonces $(9 - v)t_2 = 1$. Nos dicen que $t_1 + t_2 = \frac{1}{4}h$, luego $\frac{1}{4} = t_1+t_2 = \frac{1}{9+v}+\frac{1}{9-v}$. Esto es equivalente a $\frac{18}{9^2-v^2} = \frac{1}{4}$, es decir $4\cdot 18 = 81-v^2$,

por lo que $v^2 = 81 - 72 = 9$ y entonces $v = 3$ km/h.

12) Denotemos por r y s a los valores del inradio y el semiperímetro del triángulo AFE, respectivamente. Tenemos que Área$(AFE) = \frac{b\times h}{2} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$. Por otro lado, Área $(AFE) = s\cdot r = \left(\frac{3+4+5}{2}\right)\cdot r = 6r$. Luego, $6r = 6$, de donde obtenemos que $r = 1$.



Siendo A' y F' como en la figura e I el incentro del triángulo AFE, $IF'EA'$ forma un cuadrado de lado $r = 1$, por lo que $EF' = 1$ y, por el teorema de Tales, se concluye que $\frac{AB}{AF} = \frac{AF'}{F'E}$, de donde $AB = \frac{AF'\cdot AF}{F'E} = \frac{3\cdot 5}{4} = \frac{15}{4}$.

Nivel III. Parte B.

1) Coincide con el Problema 2 del Nivel II, Parte B.

2) Sea x la cantidad de años entre el presente y el momento en el que Berta tenga el triple de la edad actual de Ana. Entonces, los enunciados se traducen en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} B + x &= 3A, & (2)\\ A + x + C + x &= A + B + C + D + E, & (3)\\ D + x &= 3D, & (4)\\ E + x &= 2B + 1. & (5)\end{aligned}$$

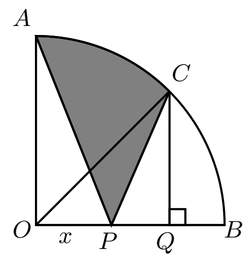
De la ecuación (3) podemos ver que $x = 2D$. Sustituyendo este valor en las ecuaciones (2) y (4) y resolviendo el sistema resultante obtenemos que $D = \frac{3B+1}{5}$ y $E = \frac{4B+3}{5}$. Sustituyendo $x = 2D = \frac{6B+2}{5}$ en la ecuación (1) obtenemos que $15A = 11B + 2$. Además, como A es impar entonces $11B + 2$ debe terminar en 5, por lo que B debe terminar en 3. Por otro lado, como $A \leq 29$ entonces tenemos la desigualdad

$$B = \frac{15A - 2}{11} \leq \left\lfloor \frac{15\cdot 29 - 2}{11} \right\rfloor = 39,$$

así que $B = 3, 13, 23, 33$. Probando estos casos, verificamos que la única solución entera es $B = 23$ y $A = 17$. Por lo tanto, la suma de las edades de Ana y Berta es $23 + 17 = 40$.

Nota: También se puede resolver la ecuación diofantina por los métodos usuales y encontrar que $B = 23$ es la única solución impar con $1 \leq A \leq 29$.

3) Sean $x = OP$ y Q el pie de la altura de C sobre OB.



Notemos que la región sin sombrear está compuesta de dos partes. Área$(OAP) = r \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$. El área de la segunda parte se puede calcular restando al área del sector COB el área del triángulo OCP. Ahora bien, el triángulo OCQ es rectángulo isósceles de hipotenusa $r = 1$, así que $CQ = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto,

$$\text{Área(sector } COB) - \text{Área}(OCP) = \frac{\pi}{8} - \frac{x(1/\sqrt{2})}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{x}{2\sqrt{2}}.$$

De este modo, tenemos la desigualdad $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}-1}{2}x > \frac{\pi}{8}$. En otras palabras, la región sin sombrear tiene siempre un área mayor a la mitad del área del sector OAB. En consecuencia, la región sombreada siempre tendrá menor área que la región sin sombrear.

Otra forma. Sea R la intersección de AP y OC. Es claro que Área$(AOP) >$ Área(COP) ya que estos triángulos tienen por base común a OP, y la altura desde A es mayor a la altura desde P. Como el triángulo ROP es común a estos dos triángulos, se tiene que Área$(AOR) >$ Área(CRP). Por lo tanto,

$$\text{Área(región sombreada)} < \text{Área(sector } AOC) \leq \text{Área(región sin sombrear)}.$$

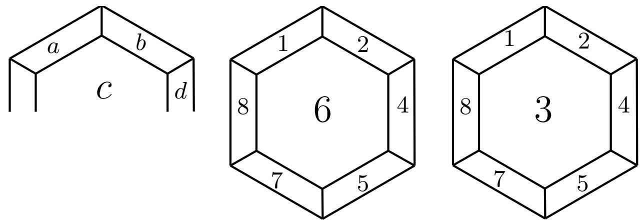
Soluciones de las Pruebas por Equipos

Nivel I.

1) Como $6^3 = 216$, $5^4 = 625$, $3^6 = 729$ y $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = 1024$, tenemos que $6^3 < 5^4 < 3^6 < 4^5$.

2) Notemos que el triángulo PQR es una cuarta parte del triángulo AEC. Además, el triángulo AEC tiene la mitad del área del hexágono. Por lo tanto, el área del triángulo PQR es $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ del área del hexágono. Así, Área$(\triangle PQR) = \frac{1}{8}$.

3) Los números son 3 y 6. Si una cara no central tiene un número a múltiplo de 3, entonces si d está en una cara a dos caras de distancia de a (sin pasar por el centro), estos tienen dos vecinos en común (como se muestra en la figura). Si estas tienen los números b y c, entonces $a + b + c$ es múltiplo de 3 y $b + c + d$ es múltiplo de 3, de donde se sigue que su diferencia, igual a $a - d$, es múltiplo de 3.



Como a es múltiplo de 3, d también lo es. Entonces no puede haber un múltiplo de 3 fuera del centro ya que habría al menos 3 caras con múltiplos de 3 y, del 1 al 8, hay 2 múltiplos de 3. Concluimos que se puede tener a lo más un múltiplo de 3 y como se omite solo un número, este debe ser 3 o 6. Para ambos casos se encuentra un acomodo que funciona.

4) Sergio tiene el primer día 3 posibilidades de pedir: paletas, raspados y sandwich de nieve. Del día 2 al 7, tiene solo dos posibilidades en cada día, porque si un día pide sandwich de nieve, al siguiente solo puede pedir paletas o raspados. Por el principio del producto, Sergio tiene $3 \times 2^6 = 192$ formas. Por otro lado, Zael tiene el primer día 4 posibilidades de pedir y, del día 2 al 7, tiene solo 3 posibilidades en cada día, por un argumento análogo. Por el principio del producto, Zael tiene $4 \times 3^6 = 2916$ formas. Por lo tanto Zael tiene más formas.

5) Notemos que únicamente 6 números han sido cambiados de posición, el 1 fue cambiado por el 3, el 4 por el 6 y el 7 por el 9, mientras que los números 2, 5 y 8 se mantuvieron en su lugar original. Entonces, de las multiplicaciones de un número por él mismo, 3 son correctas y las otras 6 son equivocadas. A partir de ahora consideraremos multiplicaciones de dos números diferentes. Empecemos analizando las multiplicaciones donde ambos números son alguno de los números 2, 5, 8. Todas estas serán correctas y hay $3 \times 2 = 6$ de ellas. Ahora, si ambos números que teclea César son algunos de 1, 4, 7, entonces la calculadora registrará dos números entre 3, 6, 9, por lo que el resultado será múltiplo de 9 y, como ninguno de 1, 4, 7 es múltiplo de 3, el resultado no será correcto. De manera similar, si ambos números que teclea César son algunos de 3, 6, 9, el resultado debería de ser múltiplo de 9, pero como la calculadora registra algunos de los números 1, 4, 7, no lo será. Es decir, en todos estos casos el resultado será incorrecto. El número de posibilidades que hay es $(3\times2)+(3\times2) = 12$. Pasemos ahora al caso en que uno de los números es uno de 2, 5, 8 y el otro es uno de 1, 3, 4, 6, 7, 9. En todos estos casos la multiplicación será incorrecta. Hay $(3 \times 6) + (6 \times 3) = 18 + 18 = 36$ de estos casos. Finalmente vemos qué pasa cuando uno de los números es uno de 1, 4, 7 y el otro de 3, 6, 9. Claramente las multiplicaciones 1×3, 3×1, 4×6, 6×4, 7×9 y 9×7 serán correctas. Son 6 multiplicaciones correctas y las restantes 12 multiplicaciones serán incorrectas. Por lo tanto, hay $6 + 12 + 36 + 12 = 66$ multiplicaciones incorrectas.

6) Ningún dígito debe ser cero y no puede tener 5 o 6 dígitos iguales a 1, (ya que no es posible que se cumpla: $5 + a = a$ o $6 = 1$).
Si tiene 4 dígitos iguales a 1, los otros dos dígitos a y b cumplen que $a+b+4 = ab$, que es equivalente a que $(a - 1)(b - 1) = 5$. Luego, $a = 6$ y $b = 2$ o bien $a = 2$

y $b = 6$. Entonces, el número que se busca es 111162 o 111126 y, el segundo es el más pequeño.

7) Sí es posible. Una manera es la siguiente. Se coloca el 1 a un lado de 6, independiente del número x. En las esquinas a y b se deben colocar números que su producto sea 6, estos son 2 y 3 (no pueden ser 1 y 6 porque los 9 números son diferentes).

		a
1	6	x
		b

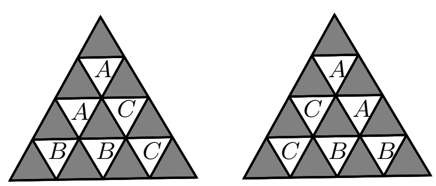
En las otras esquinas se colocan números que se ajusten para que el producto de los números en las diagonales sean iguales. Digamos así,

$2 \cdot 6$		2
1	6	
$3 \cdot 6$		3

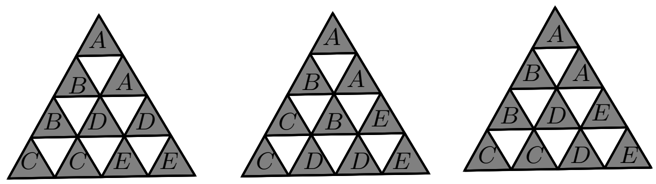
Como el producto es 6^3, lo que falta queda así:

$2 \cdot 6$	3^2	2
1	6	6^2
$3 \cdot 6$	2^2	3

8) Si coloreamos la figura como tablero de ajedrez, de gris y blanco, notamos que una pieza siempre debe cubrir dos triangulitos grises, o bien dos triangulitos blancos. Contaremos las maneras de acomodar los triangulitos de cada color y bastará aplicar el principio del producto. La región blanca se puede llenar con 3 piezas de 2 maneras distintas (ver figura).



La región gris se llena con 5 piezas de la siguiente manera: primero se coloca la pieza que va en el vértice superior del triángulo –para ello hay dos casos– y se observa que cada caso se completa de 3 maneras distintas (en la figura se ilustra uno de esos casos). Así, hay $2 \times 3 = 6$ maneras de llenar la región gris. Por lo tanto, la respuesta es $2 \times 6 = 12$.



Nivel II

1) Coincide con la solución del Problema 3 del Nivel I.

2) Coincide con la solución del Problema 6 del Nivel I.

3) Notemos que $(x, y) = (0, 1)$ y $(x, y) = (1, 0)$ son soluciones. Por la segunda igualdad x y y tienen valor absoluto menor o igual que 1. Además, no existe solución con $x = y$, tampoco con $x = -1$ y tampoco con $y = -1$. Supongamos que $x < y$ y analicemos los siguientes casos:

   a) Si $x > 0$, entonces tenemos que $0 < x < y \leq 1$. Por lo tanto, $x^3 < x^2$ y $y^3 < y^2$ y así $1 = x^3 + y^3 < x^2 + y^2 = 1$, lo cual es absurdo.

   b) De manera similar, si $x < 0$ entonces $y^3 = 1 - x^3 > 1$, luego $y > 1$, contradiciendo la segunda ecuación.

   Por lo tanto, la única alternativa es $x = 0$ y entonces $y = 1$. Concluimos que las únicas soluciones son $(x, y) = (0, 1)$ y $(x, y) = (1, 0)$.

4) Sea $c = a + 2r$, entonces

$$N = (c-2r)^2 + (c-r)^2 + c^2 + (c+r)^2 + (c+2r)^2 = 5c^2 + 10r^2$$

   tiene todas su cifras iguales. Como N es divisible entre 5, acaba en 5 o 0. Luego, todas las cifras de N deberán ser 0 o 5. El primer caso implica que $N = 0$ y en consecuencia $a = r = 0$, lo cual es absurdo. En el segundo caso tenemos que $\frac{N}{5} = c^2 + 2r^2$ tiene todas sus cifras iguales a 1. Por lo tanto, si $\frac{N}{5}$ tiene tres cifras o más, entonces $\frac{N}{5} \equiv 111 \equiv 7 \pmod 8$. Sin embargo, dado que los cuadrados son congruentes a 0, 1 o 4 módulo 8, entonces tenemos que $c^2 + 2k^2$ es congruente a 0, 1, 2, 4 o 6 módulo 8, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, tenemos que $\frac{N}{5} = 1$ o $\frac{N}{5} = 11$. El primer caso implica que $k = 0$, por lo que $a = b = c = d = e = 1$, llegando nuevamente a un absurdo. Finalmente, al resolver $c^2 + 2k^2 = 11$ obtenemos que $c = 3$ y $k = 1$. De este modo, la única solución es la progresión $1, 2, 3, 4, 5$.

5) Sea $\beta = \angle ABC$. Consideremos a O' el centro del circuncírculo del triángulo ACC'. Por la medida del ángulo inscrito, $\angle CO'A = 2\angle CC'A = 2\angle ABC = 2\beta$. Tenemos también por ser isósceles los triángulos $AO'C$ y AOC, que $\angle O'AC = \angle ACO' = 90° - \beta = \angle OAC = \angle OCA$, por lo que son congruentes los triángulos $AO'C$ y AOC. Luego, $O'C = O'A = OA = OC$. Como $\angle OCO' = 180° - 2\beta$,

se tiene que $\angle O'CC' = 180° - \angle OCO' = 2\beta$ y $O'C = OC = CC'$ y, como $O'C = O'C'$ (ya que O' es el centro del circuncírculo de ACC'), se tiene que $CC'O'$ es un triángulo equilátero, de donde $\angle O'CC' = 2\beta = 60°$, por lo que $\beta = 30°$.

6) Coincide con la solución del Problema 8 del Nivel I.

7) Haremos una demostración por casos. Como $abcd < 2108$, tenemos que $a = 1$ o $a = 2$. Cuando $a = 1$ entonces tenemos la ecuación

$$b + c + d = p - 1.$$

Si $p = 2$, entonces la única solución es $b = d = 0$, $c = 1$, por lo que el único número creativo en este caso es 1010. Si p es un primo impar, dado que b y d son pares, por paridad concluimos que c también lo es. Además, como cd es un número de dos cifras tenemos que $c \neq 0$. Por lo tanto, podemos hacer el cambio de variables $b = 2B$, $c = 2(C + 1)$, $d = 2D$ y transformar la ecuación anterior en

$$B + C + D = \frac{p-3}{2}$$

sujeta a las condiciones $0 \leq B \leq 4$, $0 \leq C \leq 3$, $0 \leq D \leq 4$. Por lo tanto, tenemos que $\frac{p-3}{2} \leq 4 + 3 + 4 = 11$ y en consecuencia $p \leq 25$. La siguiente tabla ilustra los valores correspondientes a los primos p que cumplen la desigualdad.

p	3	5	7	11	13	17	19	23
$\frac{p-3}{2}$	0	1	2	4	5	7	8	10

En cada caso se puede resolver la ecuación usando el método de separadores y el principio de inclusión-exclusión. La siguiente tabla muestra todas las posibilidades:

$\frac{p-3}{2}$	Soluciones	Total
0	$\binom{2}{2}$	1
1	$\binom{3}{2}$	3
2	$\binom{4}{2}$	6
4	$\binom{6}{2} - \binom{2}{2}$	14
5	$\binom{7}{2} - \left[\binom{3}{2} + 2\binom{2}{2}\right]$	16
7	$\binom{9}{2} - \left[\binom{5}{2} + 2\binom{4}{2}\right]$	14
8	$\binom{10}{2} - \left[\binom{6}{2} + 2\binom{5}{2}\right]$	10
10	$\binom{12}{2} - \left[\binom{8}{2} + 2\binom{7}{2}\right] + \left[2\binom{3}{2} + \binom{2}{2}\right]$	3

Así que hay un total de 67 soluciones en este caso. Finalmente, consideremos el caso $a = 2$ tenemos que p debe ser impar y las únicas posibilidades son 2010, 2012, 2014 y 2018. Hemos probado así que hay $1 + 67 + 4 = 72$ números creativos.

8) Supongamos que $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $e = AC$ y $f = BD$. Si los perímetros de los triángulos son iguales, se tiene que $a + b + e = b + c + f = c + d + e = d + a + f$. Luego,

$$\begin{array}{rcl} a+e & = & c+f \\ b+f & = & d+e \\ c+e & = & a+f \\ b+e & = & d+f \end{array}$$

de donde, $a - c = f - e = d - b = e - f$. Ahora, como $f - e = e - f$, se tiene que $e = f$. Luego, $a = c$, $f = e$ y $d = b$. Pero un cuadrilátero con lados opuestos iguales y con las diagonales iguales, tiene que ser un rectángulo.

Nivel III

1) Notemos primero que $A = \{3n+2 \mid 0 \leq n \leq 672\}$. Queremos asegurar que existen n y m tales que $3n + 2 + 3m + 2 = 2020$, es decir $n + m = 672$. Agrupamos los números del 0 al 672, en los conjuntos

$$\{0, 672\},\ \{1, 671\},\ \ldots, \{335, 337\},\ \{336\}.$$

Notemos que cada uno de ellos, excepto el conjunto $\{336\}$ es de la forma $\{n, 672 - n\}$, garantizando así que si escogemos dos números del mismo conjunto, hallamos la pareja $(3n+2, 3(672-n)+2)$ cuya suma es 2020. Por el principio de las casillas, necesitaríamos al menos 338 números para garantizar que esto pasa. Entonces $k = 338$.

2) Después de hacer algunos casos, surge la conjetura que la suma de los elementos del n-ésimo grupo es n^3. Para demostrarlo, notemos que el n-ésimo grupo está conformado por los los impares desde $2\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + 1$ hasta $2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - 1$. Como la suma $1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 1$ es igual a k^2, entonces tenemos que los elementos del n-ésimo bloque suman

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 = \frac{(n^4 + 2n^3 + n^2) - (n^4 - 2n^3 + n^2)}{4} = n^3.$$

Por tanto, la respuesta es $10^3 = 1000$.

3) Coincide con la solución del Problema 5 del Nivel II.

4) Coincide con la solución del Problema 4 del Nivel II.

5) Coincide con la solución del Problema 7 del Nivel II.

6) Coincide con la solución del Problema 8 del Nivel II.

7) Observemos primero que el número de caminos del Mayab que van de una casilla x a una casilla y es igual a $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$ donde m es el número de casillas que hay que recorrer en dirección horizontal para ir de x a y, y n las que hay que recorrer en

dirección vertical. Entonces tenemos que $T = \binom{a+b}{a}\binom{c+d}{c}$ donde el primer factor corresponde al recorrido de la ficha verde a la blanca, y el segundo al recorrido de la ficha blanca a la naranja. El camino del Mayab más largo, correspondiente a ir de una esquina del tablero a la opuesta en diagonal, tiene 14 movimientos. Como la ficha blanca no puede estar en una esquina se tiene que $a+b \leq 13$ y $c+d \leq 13$, y se sigue que en los coeficientes binomiales considerados a lo mucho hay un factor 7, por lo que 49 no puede dividir a ninguno de los dos. Por lo tanto, 7 divide a ambos. Ambos recorridos deben tener entonces al menos 7 movimientos y, como la suma de ambos no puede exceder a 14, por fuerza $a + b = 7 = c + d$. Esto corresponde a que el camino del Mayab de la verde a la naranja tiene 14 movimientos y, por lo tanto, ambas fichas deben estar en esquinas opuestas del tablero. El valor de a y el de c es cualquier número del 1 al 6, lo que significa que la ficha blanca puede estar en cualquier casilla del interior del tablero (que no esté en las orillas). Con esto, obtenemos que el número de formas en que T sea un múltiplo de 49 es $4 \cdot 36 = 144$, que corresponden a 4 formas de elegir la esquina verde y 36 de colocar la esquina blanca.

8) Sean d la distancia entre la casa y la escuela, v_1 la velocidad en que corren y v_2 la velocidad en que caminan. Si Adán tarda t_1 horas en correr la mitad del trayecto y t_2 horas en caminar la otra mitad, se tiene que $\frac{d}{2} = v_1 t_1 = v_2 t_2$. Por lo que su recorrido lo hace en el tiempo

$$t_1 + t_2 = \frac{d}{2v_1} + \frac{d}{2v_2} = \frac{d}{2}\left(\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}\right).$$

Por otro lado, Beto se mueve con diferentes velocidades en tiempos iguales. Si tarda t horas en hacer el recorrido, entonces

$$d = v_1 \frac{t}{2} + v_2 \frac{t}{2}, \text{ por lo que } t = \frac{2d}{v_1 + v_2}.$$

Ahora comparemos los tiempos en que tardan en llegar,

$$\frac{t_1 + t_2}{t} = \frac{\frac{d}{2}\left(\frac{v_1+v_2}{v_1 v_2}\right)}{\frac{1}{v_1+v_2}} = \frac{(v_1 + v_2)^2}{4 v_1 v_2}.$$

Pero $v_1 v_2 \leq \left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)^2$ (por la desigualdad $MG - MA$), por lo que $\frac{t_1+t_2}{t} \geq 1$, y entonces $t_1 + t_2 \geq t$, pero a menos que $v_1 = v_2$, se tiene que $t_1 + t_2 > t$; en consecuencia Beto llega primero.

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2019, No. 4

3^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional

Del 14 al 17 de junio de 2019 se llevó a cabo el Concurso Nacional de la 3^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB), en Oaxtepec, Morelos. Participaron 270 estudiantes de primaria y secundaria, representando a 31 entidades federativas del país. La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

Los ganadores de medalla de oro y medalla de plata en cada categoría, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2020 en algún país del sureste asiático.

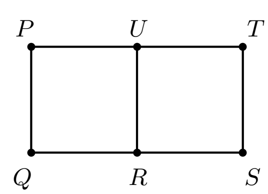
A continuación, listamos los nombres de los alumnos que integran la preselección nacional, así como los problemas y soluciones, del Nivel I de la 3^a OMMEB.

Nombre	**Estado**	**Medalla**
Javier Caram Quirós	Ciudad de México	Oro
Sebastián Montemayor Trujillo	Nuevo León	Oro
Luis Veudi Vivas Pérez	Quintana Roo	Oro
Emiliano Hernández Barranco	Morelos	Oro
Rodrigo Saldivar Mauricio	Zacatecas	Oro
Rodrigo Avilés Cabrera	Guanajuato	Oro
Kalid Rafael Rodríguez Silva	Oaxaca	Oro
Antonio Gutiérrez Meléndez	Coahuila	Plata
Ángel Eduardo Hernández Hernández	Hidalgo	Plata
Artie Aarón Ramírez Villa	Jalisco	Plata
Juan Pablo Adolfo Calva Villalobos	Estado de México	Plata
Andrea Sarahí Cascante Duarte	Morelos	Plata
Leonardo Melgar Rubí	Morelos	Plata
Eric Arce Pérez	Chiapas	Plata
Alexis Akim Ramírez Villa	Jalisco	Plata
Sebastián Gutiérrez Suárez	Sinaloa	Plata
Rania de María Rada Rivera	San Luis Potosí	Plata
Erik Julián Tamayo Pérez	Tabasco	Plata
Carlos Santos Acosta	Tabasco	Plata
Dana Karen Medina González	Yucatán	Plata
Daniel Alonso Márquez Corono	Baja California	Plata

En la prueba por equipos en el Nivel I, el Estado de Nuevo León obtuvo el primer lugar (con 290 puntos), el Estado de Zacatecas y la Ciudad de México obtuvieron el segundo lugar (con 245 puntos) y el Estado de Morelos obtuvo el tercer lugar (con 230 puntos).

Prueba Individual, Nivel I

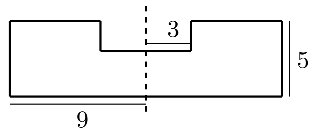
1) En la siguiente figura hay dos cuadrados unidos. ¿Cuántos triángulos rectángulos se pueden formar de manera que sus tres vértices sean puntos de P, Q, R, S, T, U?



2) El número 13 es primo y tiene la propiedad que al escribir sus dos dígitos (cifras) al revés, se obtiene un número primo, en este caso el primo 31. ¿Cuántos números primos de dos dígitos tienen esta propiedad?

3) Encuentra el número capicúa más cercano a 2019. Recuerda que un número capicúa es aquel que sus dígitos (cifras) se leen de la misma manera de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo 1221 y 212 son capicúas.

4) La figura de abajo es simétrica respecto a la recta punteada y se muestran algunas medidas sobre su contorno. Si el perímetro de toda la figura es 50 cm, ¿cuál es, en cm^2, el área de la figura?



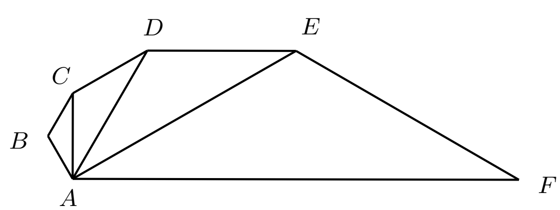
5) ¿Es posible pagar $\$25$ con monedas de $\$1$ y monedas de $\$5$, usando exactamente 12 monedas?

6) Al número de tres dígitos (cifras) $4\square7$ se le suma el número 321 para dar como resultado el número de tres dígitos $7\triangle8$. Si $7\triangle8$ es divisible entre 9, ¿cuánto vale la suma de $\square$ más $\triangle$?
Nota. Cada símbolo $\square$ *y* $\triangle$ *representa un dígito.*

7) En un tablero de 3×5 cuadritos, ¿cuántos cuadrados se pueden dibujar de manera que sus vértices sean centros de los cuadritos de 1×1 del tablero?

8) Luis tiene un nuevo restaurante, su amiga Laura le regaló mesas y sillas. Si las mesas las coloca de forma que cada una tenga 4 sillas, le faltan 6 sillas. Pero si colocan de dos en dos de forma que dos mesas juntas tengan 6 sillas, le sobran 4 sillas. ¿Cuántas mesas recibió Luis de regalo?

9) En la figura se muestra un triángulo ABC donde $\angle ABC = 120°$. Además, se cumple que $AB = BC$, $AC = CD$, $AD = DE$, $AE = EF$ y que $\angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = 150°$. ¿Cuál es el valor, en grados, del ángulo $\angle EFA$?

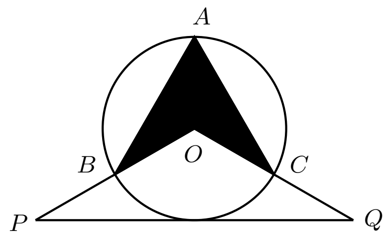


10) Las caras de un dado tienen los números $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Lalo forma números siguiendo tres pasos:
Paso 1. Escoge tres caras y multiplica los tres números de estas caras.
Paso 2. Encuentra el producto de los números de las otras tres caras.
Paso 3. El número lo forma sumando los dos resultados anteriores.
¿Cuál es el número más pequeño que puede formar Lalo de esta manera?

11) ¿Cuántos números de dos dígitos (cifras) son iguales a la suma de sus dos dígitos más el producto de sus dos dígitos?

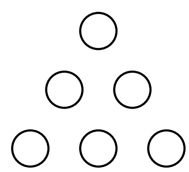
12) Un número entero se llama *ascendente* si cada uno de sus dígitos (salvo el primero a la izquierda) es mayor que el dígito que está a su izquierda. Por ejemplo, 2478 es un número ascendente. ¿Cuántos números ascendentes hay entre 4000 y 5000?

13) En la siguiente figura, el triángulo OPQ es isósceles con $OP = OQ$. La circunferencia de centro O y radio $\frac{OQ}{2}$ corta a OP en B, corta a OQ en C y toca a PQ (tangentemente). El punto A sobre la circunferencia cumple que $AB = AC$. Si el área sombreada vale 2 cm^2, ¿cuál es el valor, en cm^2, del área del triángulo OPQ?



14) a) ¿Puedes escribir a 2048 como suma de enteros consecutivos?
b) ¿Puedes escribir a 2048 como suma de enteros positivos consecutivos?

15) Lucy colocó los números $2, 3, 4, 5, 6$ y 10 en los círculos, de tal manera que el producto de los tres números de cada lado es el mismo y cuidó que el producto fuera lo más grande posible. ¿Cuál es el valor de tal producto?

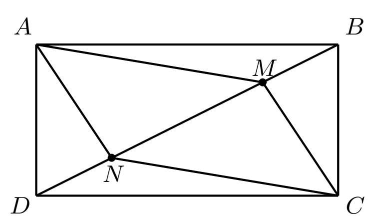


Prueba por Equipos, Nivel I

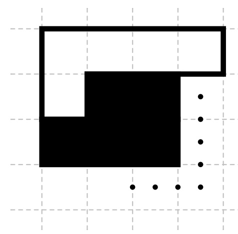
1) La suma rara (simbolizada con $\oplus$) es la suma normal más 1, por ejemplo $2 \oplus 3 = 2 + 3 + 1 = 6$ y $1 \oplus 0 = 1 + 0 + 1 = 2$.
Encuentra el valor de $1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus \cdots 1 \oplus 0$, en donde el 0 se ha escrito 100 veces.

2) ¿De cuántas formas podemos cambiar un billete de $\$100$ por monedas de $\$5$ y de $\$2$, si tenemos que utilizar al menos una moneda de cada denominación?

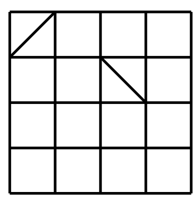
3) En un rectángulo $ABCD$ de área 40 cm^2, se construye el cuadrilátero $AMCN$ donde M y N son puntos en la diagonal BD de manera que $BM = 3$ cm, $MN = 4$ cm y $ND = 3$ cm. ¿Cuál es, en cm^2, el área del cuadrilátero $AMCN$?



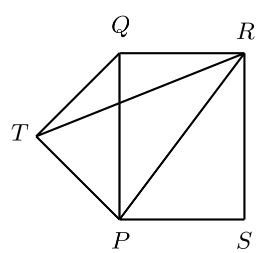
4) Marián comienza a pintar cuadritos siguiendo un patrón en espiral: pinta 2 negros, 3 grises, 5 blancos y luego repite pintando 2 negros, 3 grises, 5 blancos y así sucesivamente, tal como se observa en la figura. Marián deja de pintar cuando la figura sea un cuadrado. ¿Cuántos cuadritos pintó Marián?



5) Considera un tablero de 4×4 con 16 cuadritos. ¿Cuál es el mayor número de diagonales de cuadritos que se pueden dibujar, de manera que cualesquiera dos diagonales no tengan puntos comunes?
Nota. Por ejemplo, se pueden dibujar diagonales como en la siguiente figura.



6) En la figura, $PQRS$ es un rectángulo. El punto T está fuera del rectángulo, de manera que PQT es un triángulo con $PT = QT$ y $\angle PTQ = 90°$. Si $PQ = 4$ cm y $QR = 3$ cm, encuentra, en cm^2, el área del triángulo PRT.



7) Sobre cada una de las caras de un cubo, se trazan las dos diagonales. Cada una de las aristas del cubo y cada una de las diagonales trazadas se quieren etiquetar con uno de los números $1, 2, 3$, de manera que todos los triángulos que se formen con tres de estos segmentos, tengan las tres etiquetas en algún orden sobre sus lados. Da una manera de etiquetar.

8) Si $wxyz$ es un entero positivo de cuatro dígitos (cifras) con w diferente de 0, se llama *la suma de capas* de este entero a la suma $wxyz + xyz + yz + z$. Por ejemplo, la suma de capas del entero 4089 es $4089 + 089 + 89 + 9 = 4276$.
a) ¿Es posible que la suma de capas de algún entero $wxyz$ sea igual a 2019?
b) ¿Es posible que la suma de capas de algún entero $wxyz$ sea igual a 2020?

Soluciones de la Prueba Individual, Nivel I

1) Si la longitud del lado del cuadrado es 1, los diferentes tipos de triángulos rectángulos son:
a) Triángulos con catetos de longitudes 1 y 2, de los cuales hay 4.
b) Triángulos isósceles con catetos de longitud 1, de los que hay 8.
c) Triángulos isósceles con catetos de longitud $\sqrt{2}$, de los que hay 2.
En total hay 14 triángulos rectángulos.

2) Cualquier número que termine en $2, 4, 6$ u 8 es par, por lo cual el número no es primo. De la misma manera, no es primo cualquier número que termine en 5 ya que es divisible entre 5. Además, para que un número de dos dígitos y el escrito al revés sean primos, el número original debe empezar con $1, 3, 7$ o 9. Hay 10 primos de dos dígitos que empiezan con $1, 3, 7$ o 9, los cuales son: $11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79$ y 97, de los cuales solo el 19 no cumple que el número escrito al revés es primo, pues $91 = 7 \cdot 13$. Así que hay 9 primos de dos dígitos con esta propiedad.

3) El capicúa anterior a 2019 es 2002 y el posterior es 2112. Como $2019 - 2002 = 17$ y $2112 - 2019 = 93$, se tiene que 2002 es el más cercano.

4) Por la simetría, podemos determinar las longitudes de los lados de la figura, excepto la longitud del lado pequeño que está al lado del de longitud 3 cm. El perímetro del rectángulo grande (completo) es de 46 cm y aumentó a 50 cm al quitar el rectángulo pequeño, luego el lado menor de este rectángulo pequeño mide 2 cm. Para calcular el área, observamos que la figura se divide en 3 rectángulos de 6×5, 6×3 y 6×5. Por lo que el área es $30 + 18 + 30 = 78$ cm^2.
Otra manera de calcular el área es: restar al área del rectángulo grande, que es $18 \cdot 5$ cm^2, el área del rectángulo que se quitó, que es $6 \cdot 2$ cm^2.

5) Si fuera posible, estaríamos sumando 12 números impares (usando los números 1 y 5) y el resultado sería par, lo que es una contradicción ya que 25 es impar. Por lo tanto, la respuesta es no.

6) Si $7\triangle8$ es divisible entre 9, entonces por el criterio de divisibilidad del 9, $\triangle = 3$. Luego, $738 - 321 = 417$, lo que nos dice que $\square = 1$. Por lo tanto, $\square + \triangle = 1 + 3 = 4$.

7) Solo podemos trazar cuadrados de áreas 1, 2 y 4. El total de los de área 1 coincide con el total de formas de elegir el vértice inferior izquierdo, es decir, hay 2×4 formas de hacerlo. Para los de área 2, basta con elegir el vértice inferior del rombo dentro del cuadrado de 2×2, lo cual se puede hacer de 3 formas y hay 3 formas de

construir cuadrados de 2×2. Por lo tanto, el total de cuadrados con vértices en los centros de los cuadritos de la cuadrícula es $(2 \times 4) + 3 + 3 = 14$.

8) Fijémonos en el acomodo de las mesas dobles, podemos pensar que a cada mesa le han tocado 3 sillas. En este acomodo sobran 4 sillas. Ahora separemos las mesas dobles y coloquemos 3 sillas por mesa, notemos que estamos usando todas las mesas. Con las 4 sillas sobrantes podemos completar 4 mesas con 4 sillas. Pero en el acomodo de mesas con 4 sillas nos faltan 6 sillas y, como tenemos ya todas las mesas con 3 sillas (y las 4 ya con 4 sillas), hay 6 mesas incompletas. Por lo tanto, son 10 mesas las que Luis recibió de regalo.

9) Como $AB = AC$ y $\angle ABC = 120°$, tenemos que $\angle BCA = 30°$. Luego, $\angle ACD = 120°$ ya que $\angle BCD = 150°$. Análogamente, como $CA = AD$, obtenemos que $\angle CDA = 30°$. De la misma forma, resulta que $\angle DEA = 30°$ y, por lo tanto, $\angle EFA = 30°$.

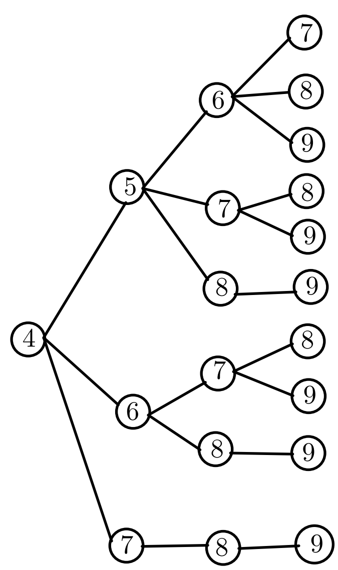
10) El número más pequeño que se puede obtener es cuando se acomodan de alguna de las siguientes formas:

$$6 \times 5 \times 1 + 4 \times 3 \times 2 = 54,$$

$$6 \times 4 \times 1 + 5 \times 3 \times 2 = 54.$$

11) El número ab cumple lo requerido si $10a + b = a + b + a \cdot b$, por lo que $9a = a \cdot b$ y, como a no es cero, se tiene que $b = 9$. Luego, los números son 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99. Por lo tanto, la respuesta es 9.

12) El dígito de las unidades de millar es 4 y el dígito de las centenas puede ser 5, 6 o 7. En cada caso, el dígito de las decenas es 6, 7 u 8; 7 u 8; 8, respectivamente. Ahora, el dígito de las unidades es en cada subcaso: 7, 8 o 9; 8 o 9; 9; 8 o 9; 9; 9, respectivamente. Esto se muestra en el siguiente diagrama.



13) Sea D el punto de tangencia de la circunferencia con PQ. La simetría de la figura permite ver que $DB = DC$ y, por lo tanto, A, O y D son colineales con $OA = OD$. Esto implica que el área del cuadrilátero $OBDC$ es igual al área sombreada, es decir, vale 2. Además, es claro que $(OPQ) = 2(OPD)$ pero, como $OP = 2OB$ (por cómo se construyó B), entonces $(OBDC) = 2(OBD) = (OPD)$. Por lo tanto, $(OPQ) = 2(OBDC) = 4$. (Los paréntesis denotan área).

Segunda Solución. Sea D el punto de tangencia de la circunferencia con PQ. Como $OP = OQ$ y OD es común a los triángulos rectángulos OPD y OQD, estos son congruentes y, por lo tanto, de la misma área. También por tener lados correspondientes iguales, son congruentes los triángulos ABO y ACO. Como consecuencia, A, O y D son colineales. Como $AO = OD$ los triángulos ABO y OBD tienen la misma área. Análogamente, los triángulos ACO y OCD tienen la misma área. Luego, todos triángulos ABO, BOD, BPD, CDQ, ODC y AOC tienen área igual a 1, por lo que el área de OPQ es igual a 4.

14) a) Sí es posible. Una forma es

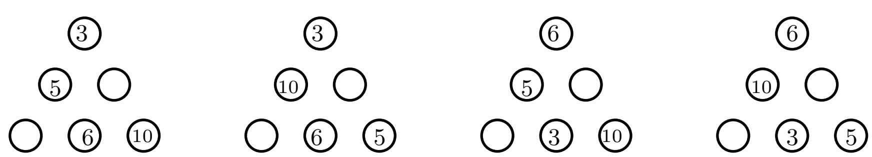
$$(-2047) + (-2046) + \cdots + (-1) + 0 + 1 + 2 + \cdots + 2047 + 2048 = 2048.$$

b) No es posible. La suma de r enteros positivos consecutivos es de la forma,

$$(n+1) + \cdots + (n+r) = nr + \frac{r(r+1)}{2} = \frac{r(2n+r+1)}{2}.$$

De aquí que r es par o $2n + r + 1$ es par. Si r es par, entonces $r + 1$ es impar y también $(2n + r + 1)$ es impar. Luego, como $2048 = 2^{11}$ no tiene factores impares, no es posible escribirlo como suma de enteros positivos consecutivos. De manera análoga se prueba que si $2n + r + 1$ es par, entonces r es impar y, por lo tanto, no es posible escribir a 2048 como suma de enteros positivos consecutivos.

15) Escribamos los números dados como producto de números primos. Tenemos que $2 = 2$, $3 = 3$, $4 = 2^2$, $5 = 5$, $6 = 2 \cdot 3$ y $10 = 2 \cdot 5$. Notemos que solo hay dos factores 3 y dos factores 5, entonces 3 y 6 no pueden estar sobre un mismo “lado” del triángulo. Análogamente, 5 y 10 no pueden estar sobre un mismo lado del triángulo. Salvo rotaciones y reflexiones, hay cuatro maneras de acomodar los números $3, 5, 6, 10$, que son las siguientes.



Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel I

1) Observemos que $n \oplus 0 = n + 1$. La sucesión de sumas raras parciales

$$1,\ 1 \oplus 0,\ 1 \oplus 0 \oplus 1,\ 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0,\ \ldots$$

es $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \ldots$ Observemos que esta sucesión inicia con el número 1, luego alternadamente están los siguientes dos pares consecutivos y después los siguientes dos impares consecutivos, y así sucesivamente. El valor buscado corresponde al término 200 de la sucesión. El término en la posición $4m$ es $6m - 1$, luego el término $200 = 4(50)$ es $6(50) - 1 = 299$.

Solución alternativa. Podemos agrupar en 100 parejas como sigue

$$[1 \oplus 0] \oplus [1 \oplus 0] \oplus \cdots \oplus [1 \oplus 0],$$

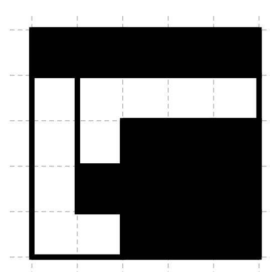
donde $[1 \oplus 0] = 2$, así que la operación buscada es $2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus \cdots \oplus 2$, donde los números 2 aparecen 100 veces. Como en cada suma rara se agrega un 1 adicional a los dos que se suman y como hay 99 símbolos $\oplus$, tenemos que sumar todos los números 2 y agregar 1 por cada símbolo $\oplus$. El resultado es $100(2) + 99(1) = 299$.

2) El cambio se debe dar con un número par de monedas de $\$5$ y completar con monedas de $\$2$, hasta llegar a los $\$100$. Como debe utilizar al menos una moneda de cada denominación, entonces se deben utilizar 2 o 4 o 6 $\ldots$ o 18 monedas de $\$5$. Luego, hay 9 maneras de poder cambiar el billete.

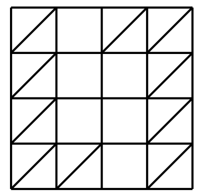
3) Como $MN = 4$ y $BD = 3 + 4 + 3 = 10$, tenemos que $\frac{(AMN)}{(ABD)} = \frac{MN}{BD} = \frac{4}{10}$. Por la simetría de la figura, tenemos que $(AMCN) = 2(AMN)$ y $(ABCD) = 2(ABD)$, por lo que $(ABD) = \frac{(ABCD)}{2} = 20$. Por lo tanto,

$$(AMCN) = 2(AMN) = 2\left(\frac{4}{10}\right)(ABD) = \left(\frac{4}{5}\right)(20) = 16.$$

4) Para que la figura pintada sea un cuadrado, el número de cuadritos pintados debe ser un cuadrado perfecto. La primera vez que sucede esto es cuando hay 25 cuadritos pintados ($25 = 2+3+5+2+3+5+2+3$ y es fácil ver que no se obtienen cuadrados perfectos antes). Para verificar que, en efecto, la figura pintada será un cuadrado, se muestra la figura. Por lo tanto, el número de cuadritos que pintó Marián es 25.

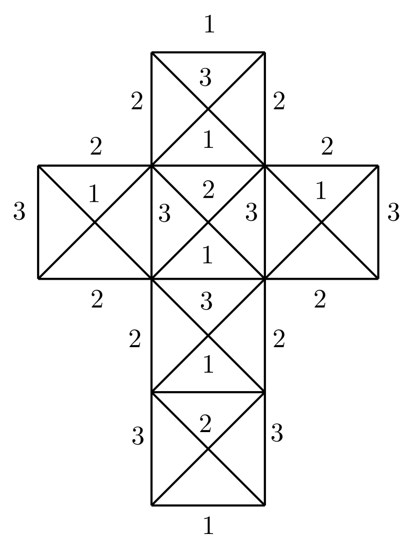


5) La respuesta es 10. En la siguiente figura se muestra un ejemplo.



6) Tenemos que, $(PRQ) = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$. Ahora, sea M el punto medio de PQ, que también es el pie de altura desde T hasta PQ. Como PQT es un triángulo rectángulo isósceles, resulta que $QM = TM = PM = 2$. Luego, $(PQT) = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$, por lo que $(PRQT) = (PQT) + (PRQ) = 10$. Además, claramente la altura desde T hasta la recta QR mide lo mismo que QM, es decir, 2. Entonces, $(TRQ) = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$ y, por lo tanto, $(PRT) = (PTQR) - (TRQ) = 10 - 3 = 7$.

7) Desdoblando el cubo podemos hacer el siguiente etiquetado, donde las diagonales en cada cara tienen la misma etiqueta.



8) a) No es posible porque la última cifra de la suma de capas se obtiene de la última cifra de $4 \times z$ y ningún producto de esta forma termina en 9.
b) Sí se puede con 1505 o con 2005.

TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2020, No. 1

3^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional

Del 14 al 17 de junio de 2019 se llevó a cabo el Concurso Nacional de la 3^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB), en Oaxtepec, Morelos. Participaron 270 estudiantes de primaria y secundaria, representando a 31 entidades federativas del país. La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

Los ganadores de medalla de oro y medalla de plata en cada categoría, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2020 en algún país del sureste asiático.

A continuación, listamos los nombres de los alumnos que integran la preselección nacional, así como los problemas y soluciones, de los Niveles II y III de la 3^a OMMEB.

Nombre	Estado	Medalla	Nivel
Rosa Victoria Cantú Rodríguez	Ciudad de México	Oro	II
Tiago Ian Vargas Rivera	Yucatán	Oro	II
Franco Giosef Álvarez González	Chiapas	Oro	II
Mateo Iván Latapí Acosta	Ciudad de México	Oro	II
Valeria Yhelenna Oviedo Valle	Morelos	Oro	II
Dayana Ximena Meza Arellano	Zacatecas	Oro	II
Fernando Álvarez Ruiz	Nuevo León	Oro	II
Rogelio Guerrero Reyes	Aguascalientes	Plata	II
Daniel Flores Gómez	Jalisco	Plata	II
Carlos Eduardo Seck Tuoh Cabrera	Hidalgo	Plata	II
Luis Enrique López Hernández	Hidalgo	Plata	II
Emilio Estrada Pérez	Estado de México	Plata	II
Bastian Alejandro López Vásquez	Oaxaca	Plata	II
José Carlos Velazco Escobar	Sinaloa	Plata	II
Said Huizar Dorantes	Guanajuato	Plata	II
Sebastián Escalante Rubio	Yucatán	Plata	II
Ever Juárez Quiñones	Tlaxcala	Plata	II
Saúl Nájera Ávila	Coahuila	Plata	II
Alejandra Muñoz Espin	Morelos	Plata	II
Daniel Ramírez Kuhn	San Luis Potosí	Plata	II
Jacobo	Yucatán	Oro	III
Luis Eduardo Martínez Aguirre	Nuevo León	Oro	III
José Manuel Flores Absalón	Ciudad de México	Oro	III
Omar Farid Astudillo Marbán	Guerrero	Oro	III
David García Maldonado	Oaxaca	Oro	III
Carlos Fernando Amador Mtz. Quintero	Ciudad de México	Oro	III
Diego Caballero Ricaurte	Ciudad de México	Oro	III
Cynthia Naely López Estrada	Guanajuato	Plata	III
Victor Manuel Bernal Ramírez	Sinaloa	Plata	III
Alier Sánchez y Sánchez	Quintana Roo	Plata	III
Karol Anette Lozano González	Tlaxcala	Plata	III
José Rafael Gutiérrez Suárez	Colima	Plata	III
Alejandro Oxymandias Cepeda Beltrán	Estado de México	Plata	III
Diego Ocaranza Nuñez	Jalisco	Plata	III
Dariam Samuel Aguilar García	Baja California	Plata	III
Juan Braulio Olivares Rodríguez	Guanajuato	Plata	III
Aylin Ximena Ocampo Vera	Guerrero	Plata	III
Enrique Rabell Talamantes	Querétaro	Plata	III
Valentina Acosta Bueno	San Luis Potosí	Plata	III
Andrea Escalona Contreras	Morelos	Plata	III
Diana Andrea González Díaz	Chiapas	Plata	III
José David Fragoso Aquino	Tamaulipas	Plata	III

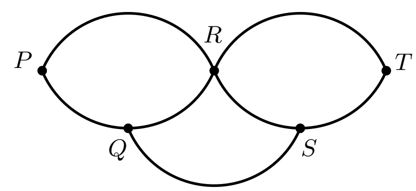
En la prueba por equipos en el Nivel II, el Estado de Chiapas obtuvo el primer lugar

(con 222 puntos), el Estado de Hidalgo obtuvo el segundo lugar (con 175 puntos) y el Estado de Aguascalientes obtuvo el tercer lugar (con 170 puntos).
En la prueba por equipos en el Nivel III, el Estado de Yucatán obtuvo el primer lugar (con 280 puntos), el Estado de Guanajuato obtuvo el segundo lugar (con 271 puntos) y el Estado de Oaxaca obtuvo el tercer lugar (con 260 puntos).

Prueba Individual, Nivel II

Parte A

1) Cinco ciudades se comunican con un sistema de carreteras como se muestra en el dibujo. ¿Cuántos caminos diferentes puede seguir una persona que quiere ir de P a T, siempre con dirección a la derecha?



2) En una dulcería hay una máquina expendedora de dulces que tiene dos botones y un recipiente. Después de insertar una moneda puedes apretar un solo botón, el botón A deja caer 16 dulces en el recipiente y el botón B deja caer en el recipiente el $50\,\%$ de los dulces que hay en el recipiente. Si el recipiente al inicio está vacío, ¿cuál es la mayor cantidad de dulces que se pueden obtener con 5 monedas?

3) Los vértices de un triángulo ABC están en una circunferencia de manera que las medidas de los arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ y $\widehat{CA}$ son, respectivamente, $x + 75°$, $2x + 50°$ y $4x - 10°$. Encuentra las medidas, en grados, de los ángulos internos del triángulo ABC.
Nota. El arco $\widehat{AB}$ es el que no contiene al vértice C, análogamente $\widehat{BC}$ y $\widehat{CA}$, no contienen a A y B, respectivamente.

4) Benito compró comida para sus 4 gatos, con la idea de que le alcanzará para 12 días. En el camino se encontró otros dos gatos que los llevó a su casa. ¿Cuántos días le durará la comida ahora con los 6 gatos?

5) Encuentra la suma de los dos números capicúas más cercanos a 2019. Recuerda que un número capicúa es aquel que sus dígitos (cifras) se leen de la misma manera de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo 1221 y 212 son capicúas.

6) Un padre y su hijo cumplen años el mismo día. En tres cumpleaños diferentes, la razón entre sus edades fueron $\frac{7}{3}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{2}{1}$. ¿Cuál es la diferencia de edades entre el padre y su hijo?

7) Eugenio tiene 4 borregos y una báscula que solo le permite pesar borregos en parejas (esto es, de dos en dos). ¿Cuál es la mínima cantidad de veces que Eugenio debe usar la báscula para conocer el peso de cada uno de sus borregos?

8) Cuatro amigos intercambian sus libros de olimpiada. Cada amigo tiene un libro para regalar a otro amigo, y recibirá un libro de un amigo diferente al que él regaló, (es decir, dos amigos no se intercambian libros). ¿De cuántas maneras se pueden intercambiar los libros?

9) Sea $\mathcal{K}$ una circunferencia con diámetro AB y centro O. Sea C un punto de $\mathcal{K}$ tal que $\angle ABC = 60°$. Sea D un punto del arco $\widehat{CA}$ (el de menor longitud) tal que $\angle AOD = 30°$. Si BC y DO se intersecan en P, encuentra la razón del área del triángulo ADO entre el área del triángulo BPO.

10) Considera todos los números que se obtienen de 74477447 al reordenar sus cifras, ¿cuántos de estos números son cuadrados perfectos?
Recuerda que un número es cuadrado perfecto si es el cuadrado de un entero. Por ejemplo, $36 = 6^2$ *y* $49 = 7^2$ *son cuadrados perfectos.*

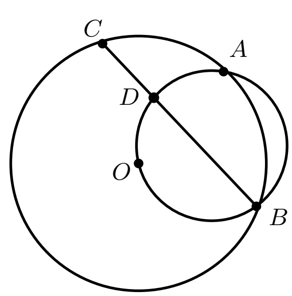
11) En una fiesta donde se baila en parejas chica-chico, se sabe que el $60\,\%$ de los chicos está bailando y el $80\,\%$ de las chicas está bailando. ¿Cuánta gente está bailando si en la fiesta hay exactamente 35 personas?

12) Sean ABC un triángulo con $AB = BC$, $\angle ABC = 90°$ y M el punto medio de AC. Se construye el triángulo equilátero ADM tal que D y B están en lados opuestos con respecto a AC. ¿Cuánto vale, en grados, el ángulo $\angle BDM$?

Parte B

1) En una bolsa hay 9 canicas, de las cuales al menos una de ellas es verde. Además, cuando sacas cualesquiera 4 canicas hay al menos 2 que son del mismo color y, cuando sacas cualesquiera 5 de ellas, hay a lo más 3 del mismo color. ¿Cuántas canicas verdes hay en la bolsa?

2) Sean C_1 una circunferencia con centro en O y C_2 una circunferencia que pasa por O y corta a C_1 en A y B. Sea C un punto en C_1 (O y C del mismo lado respecto de la recta AB) y D la intersección de BC con C_2. Muestre que el triángulo ADC es isósceles.



3) Ana escoge 4 números de entre $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Si Ana le dijera a Beto cuál es el producto de los 4 números que escogió, esta información no sería suficiente para que Beto pueda saber la paridad de la suma de los cuatro números escogidos por Ana. ¿Cuál es el producto de los cuatro números que eligió Ana?

Prueba por Equipos, Nivel II

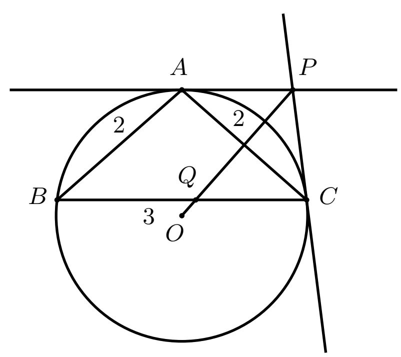
1) Un entero positivo de cuatro dígitos es *bidigital* si su expresión decimal usa solamente dos dígitos y cada uno de ellos es usado dos veces. Por ejemplo, 2020 es bidigital, mientras que 2222 y 2111 no lo son. ¿Cuántos números bidigitales hay?

2) Encuentra los enteros positivos z, para los cuales $\dfrac{5z+64}{z+2}$ es una potencia de 2.

3) Un número es *chido* si la suma de sus dígitos entre el producto de sus dígitos, sin contar el 0, es $\frac{2}{3}$. Por ejemplo, 2019 es chido porque la suma de sus dígitos es $2 + 1 + 9 = 12$, el producto de sus dígitos es $2 \times 1 \times 9 = 18$ y $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. Encuentra el número chido más cercano a 2019 (que sea distinto de 2019).

4) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar números de entre $0, 1, 2$, en cada uno de los cuadritos de un tablero de 5×5, de manera que cada subtablero de 2×2 cumpla que la suma de los cuatro números de sus cuadritos sea un múltiplo de 3?

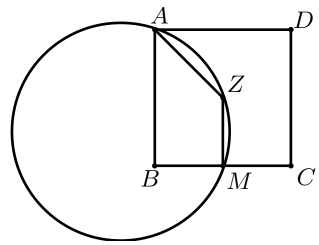
5) Sea ABC un triángulo con $AB = AC = 2$ cm y $BC = 3$ cm. Considera la circunferencia que pasa por los vértices A, B, C y digamos que su centro es O. Se trazan las tangentes a dicha circunferencia que pasan por A y por C, estas tangentes se cortan en P. El segmento PO corta a BC en Q. Calcula, en cm, la longitud de CQ.



6) ¿Cuál es el menor entero positivo que no es divisor común de alguna pareja de enteros distintos de la lista $2, 4, 6, \ldots, 200$?

7) El primer término de una sucesión es 97. Cada término subsecuente es la suma del dígito de las decenas y el cuadrado del dígito de las unidades del término anterior a él. Por ejemplo, el segundo término es $9 + 7^2 = 58$. Encuentra el término 2019 de tal sucesión.

8) Sean $ABCD$ un cuadrado cuyo lado mide 2 cm, M el punto medio del lado BC y Z el centro del cuadrado. Encuentra, en cm, el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, M y Z.



Prueba Individual, Nivel III

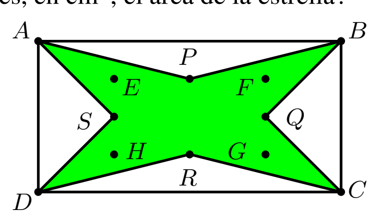
Parte A

1) Las caras de un dado tienen los números $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Lalo forma números siguiendo tres pasos: *Paso 1.* Escoge tres caras y multiplica los tres números de estas caras; *Paso 2.* Encuentra el producto de los números de las otras tres caras; *Paso 3.* El número lo forma sumando los dos resultados anteriores. ¿Cuál es el número más pequeño que puede formar Lalo de esta manera?

2) Sea $ABCDE$ un pentágono regular cuyos vértices están en una misma circunferencia y sean M y N los puntos medios de los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$. ¿Cuánto mide, en grados, el ángulo $\angle BMN$?

3) En una bolsa tengo dos monedas de $\$1$, tres monedas de $\$5$ y cinco monedas de $\$10$. Si saco 5 monedas de la bolsa sin reemplazo (es decir, una vez que tomo una moneda la dejo afuera) y todas las monedas tienen la misma probabilidad de ser escogidas, ¿cuál es la probabilidad de sacar por lo menos $\$40$?

4) En un rectángulo $ABCD$ de área 40 cm^2, considera a E y G, puntos en la diagonal AC de manera que $AE = 2$ cm, $EG = 6$ cm y $GC = 2$ cm. Considera también los puntos F y H en la diagonal BD, de manera que $BF = 2$ cm, $FH = 6$ cm y $HD = 2$ cm. Se construye una estrella de 4 puntas $APBQCRDSA$, de manera que P, Q, R y S son los puntos medios de los segmentos EF, FG, GH y HE, respectivamente. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la estrella?

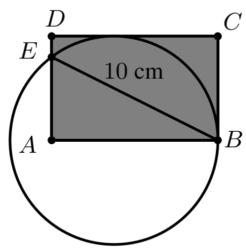


5) En una fiesta donde se baila en parejas chica-chico, se sabe que el $60\,\%$ de los chicos está bailando y el $80\,\%$ de las chicas está bailando. ¿Cuánta gente está bailando si en la fiesta hay exactamente 35 personas?

6) Rogelio pinta los vértices de un cubo de 8 colores distintos. ¿De cuántas formas se pueden acomodar las letras de la palabra OAXTEPEC en los vértices del cubo de tal manera que no haya 2 letras E unidas por una arista?

7) Considera todos los números que se obtienen de 74477447 al reordenar sus cifras. ¿cuántos de estos números son cuadrados perfectos?
Recuerda que un número es cuadrado perfecto si es el cuadrado de un entero.

8) Encuentra, en cm^2, el área del rectángulo sombreado $ABCD$ de la siguiente figura, si se conoce que la longitud del segmento BE es de 10 cm y la circunferencia es tangente a los lados BC y CD del rectángulo.



9) ¿Cuál es la menor cantidad de sumandos que se necesitan para escribir a 2019 como suma de números que sean cuadrados perfectos?

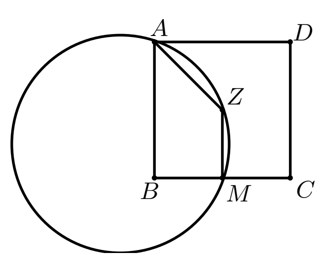
10) Para cada subconjunto de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acomoda los números en orden decreciente (de mayor a menor) y realiza la suma con signos alternados. Por ejemplo, si tomas al conjunto $\{5, 1, 2\}$ su suma alternada es $5 - 2 + 1 = 4$. ¿Cuánto vale la suma de todas las sumas alternadas cuando consideras todos los subconjuntos?

11) Un padre y su hijo cumplen años el mismo día. En tres cumpleaños diferentes, la razón entre sus edades fueron $\frac{7}{3}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{2}{1}$. ¿Cuál es la diferencia de edades entre el padre y su hijo?

12) Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios de grado 2 y a, b, c, d números reales tales que $f(a) = 500$, $f(b) = 100$, $f(c) = 1000$, $f(d) = 2015$, $g(a) = 1519$, $g(b) = 1919$ y $g(c) = 1019$. ¿Cuánto vale $g(d)$?

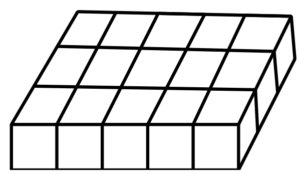
Parte B

1) Sean $ABCD$ un cuadrado cuyo lado mide 2 cm, M el punto medio del lado BC y Z el centro del cuadrado. Encuentra, en cm, el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, M y Z.



2) Un número natural es una quinta potencia si es de la forma k^5 para algún número natural k. Demuestra que si dos números naturales n y m son tales que $n^2 \cdot m^3$ es una quinta potencia, entonces el número $n^3 \cdot m^2$ también es una quinta potencia.

3) Hay 15 cajas, acomodadas en un arreglo rectangular de 3×5, como se muestra en el siguiente dibujo, además en cada caja hay 7 canicas.



Una *tirada* consiste en elegir dos cajas que compartan un lado y sacar 2 canicas, una de cada una de las dos cajas elegidas. ¿Cuál es el menor número de canicas que puede quedar, cuando ya no sea posible realizar una tirada?

Prueba por Equipos, Nivel III

1) Un triángulo acutángulo cumple que sus tres ángulos miden en grados un número entero y la medida del ángulo mayor es seis veces la medida del ángulo menor. Hallar las medidas, en grados, de los ángulos del triángulo.

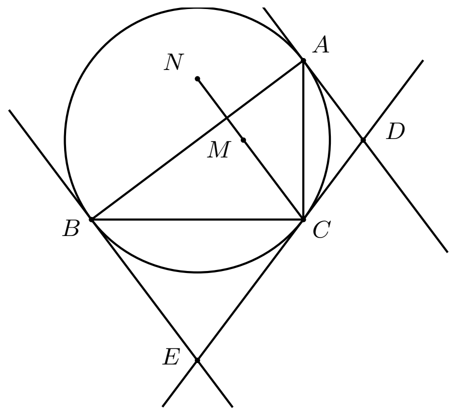
2) El primer término de una sucesión es 97. Cada término subsecuente es la suma del dígito de las decenas y el cuadrado del dígito de las unidades del término anterior a él. Por ejemplo, el segundo término es $9 + 7^2 = 58$. Encuentra el término 2019 de tal sucesión.

3) Carlos estaba jugando con los números y los acomodó de la siguiente manera.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{array}
$$

Empezó a formar caminos uniendo los números 1-2-3-4-5-6-7 mediante segmentos de rectas horizontales o verticales en ese orden y tocando solo una vez cada número. Si continua así, ¿cuántos caminos pudo formar?

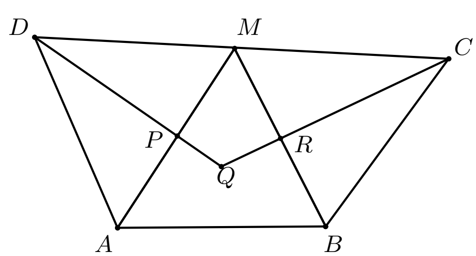
4) Sean ABC un triángulo con circuncírculo Γ, ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 las tangentes a Γ en A, B y C respectivamente. Denota por D la intersección de ℓ_1 y ℓ_3 y por E la intersección de ℓ_2 y ℓ_3. Sean M el reflejado de D con respecto a la recta AC y N el reflejado de E con respecto a la recta BC. Muestra que si M, N y C están alineados, entonces $\angle ACB = 90°$.



5) En una carrera de atletismo, los corredores A, B y C fueron los primeros en llegar a la meta. Cuando A llegó a la meta, los corredores B y C se encontraban a 2 metros y a 2.98 metros de A, respectivamente. Cuando llegó B a la meta el corredor C estaba a 1 metro de la meta. Suponga que cada una de las velocidades de los corredores son constantes durante la carrera. ¿De cuántos metros es la carrera?

6) Una *tripleta Eliana* consiste en tres números enteros positivos distintos que cumplen que la suma de dos de ellos es divisible entre el tercero de ellos. Encuentra el mayor valor que puede tener la suma de los números de una tripleta Eliana, teniendo la restricción de que el producto de sus elementos es a lo más 2019.

7) La figura $ABCD$ es un cuadrilátero. Las rectas AM, BM, CQ y DQ son bisectrices de los ángulos interiores en los vértices A, B, C y D, respectivamente y de manera que M se encuentre en DC. Sea P la intersección de AM con DQ y sea R la intersección de BM con CQ.



Si el cuadrilátero $PQRM$ es un rectángulo, encuentra el valor de $\frac{AB+CD}{BC+DA}$.

8) Muestra que no importa cómo se acomoden todos los números $1, 2, \ldots, 25$ en los cuadritos de un tablero de 5×5, siempre hay un subtablero de 2×2 que satisface que los cuatro números de este subtablero suman más de 41.

Soluciones de la Prueba Individual, Nivel II

Parte A

1) La respuesta es 5. Para ir de P a Q hay solamente un camino. Para ir de P a R hay dos caminos, uno directo desde P y otro pasando por Q. Para ir de P a S hay tres caminos, uno que pasa por Q y dos que pasan por R. Finalmente, para ir de P a T hay cinco caminos, dos que pasan por R y tres que pasan por S.

2) La respuesta es 108. Como al inicio el recipiente está vacío, con la primera moneda y apretando el botón A se tienen 16 dulces. Con la segunda moneda, se pueden obtener otros 16 dulces o incrementar en $50\,\%$ los dulces que se tienen, pero como el $50\,\%$ de 16 es 8, es mejor apretar el botón A. Ahora hay 32 dulces en el recipiente. Con la tercera moneda podemos obtener 16 dulces o el $50\,\%$ de los 32 dulces que es 16, luego en este caso da igual qué botón apretar, al final de este paso se tendrán 48 dulces. Con la cuarta moneda, es mejor apretar el botón B ya que la máquina ahora arrojará 24 dulces que es el $50\,\%$ de los 48 que había en el recipiente, ahora se tienen 72. Con la quinta moneda de nuevo conviene apretar el botón B, que darán 36 dulces, para tener finalmente 108 dulces.

3) La respuesta es $\angle C = 55°$, $\angle A = 60°$ y $\angle B = 65°$. Sabemos que $\angle C = \frac{1}{2}(x + 75°)$, $\angle A = \frac{1}{2}(2x + 50°)$ y $\angle B = \frac{1}{2}(4x - 10°)$. También sabemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$. Entonces, obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{2}(x + 75°) + \frac{1}{2}(2x + 50°) + \frac{1}{2}(4x - 10°) = 180°,$$

cuya solución es $x = 35°$. Con este valor obtenemos que las medidas de los ángulos buscados son $\angle C = 55°$, $\angle A = 60°$ y $\angle B = 65°$.

4) La respuesta es 8. Sea C la cantidad de comida que compró Benito. Cada uno de los 4 gatos come en los 12 días una cuarta parte de C. Como son 12 días, cada gato come al día la doceava parte de $\frac{C}{4}$, esto es, $\frac{C}{48}$. Como ahora tiene 6 gatos, estos comerán al día $6\frac{C}{48} = \frac{C}{8}$. Luego, la comida le durará 8 días.
Otra forma: Si Benito tuviera solamente un gato, la comida que compró le alcanzaría para 48 días. Como ahora tiene 6 gatos, le alcanzará para $\frac{48}{6} = 8$ días.

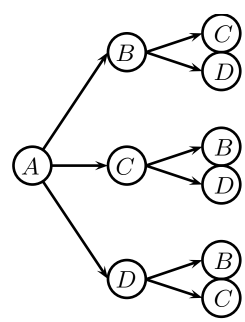
5) La respuesta es 3993. Los dos capicúas anteriores a 2019 son 2002 y 1991; y los dos posteriores son 2112 y 2222. Como $2019 - 1991 = 28$ y $2112 - 2019 = 93$, tenemos que 2002 y 1991 son los dos capicúas más cercanos a 2019 y su suma es $2002 + 1991 = 3993$.

6) La respuesta es 28. Sean p y h las edades del padre y el hijo, respectivamente. Entonces, $x = p - h$ es la diferencia que se desea encontrar. Tenemos que $\frac{p}{h} =$

$\frac{h+x}{h} = \frac{7}{3}, \frac{13}{6}, 2$ en tres momentos diferentes. Luego, para distintas edades del hijo tenemos que $\frac{x}{h_1} = \frac{4}{3}$, esto es, $3x = 4h_1$; $\frac{x}{h_2} = \frac{7}{6}$, esto es, $6x = 7h_2$; y $x = h_3$. De esto, tenemos que x es múltiplo común de 4 y 7. Por lo tanto, $x \in \{28, 56, 84, \ldots\}$. Para el caso $x \geq 56$, el padre tendría el doble de la edad del hijo en el tercer momento, por lo que tendría 112 años o más, lo cual es imposible. Por lo tanto, la única diferencia razonable es de 28 años.

7) La respuesta es 4. Veamos que usando la báscula cuatro veces es posible saber el peso de todos los borregos. Pesemos y llamemos a cada resultado como sigue: $x =$ Borrego 1 y 2, $y =$ Borrego 1 y 3, $z =$ Borrego 1 y 4, $w =$ Borrego 3 y 4. Veamos ahora que Borrego 1 $= (y + z - w)/2$ y ya teniendo este dato, Borrego 2 $= x-$Borrego 1, Borrego 3 $= y-$Borrego 1 y Borrego 4 $= z-$ Borrego 1. Ahora bien, es imposible hacerlo con tres pesadas o menos, pues tendríamos un sistema de ecuaciones lineales con 4 incógnitas y tres o menos ecuaciones, lo cuál no siempre tiene solución única.

8) La respuesta es 6. Por las condiciones establecidas en el intercambio, tiene que suceder que los cuatro amigos formen un solo ciclo al momento de darse los libros. Luego, las maneras de acomodar a los cuatro amigos en un ciclo son $\frac{4!}{4} = 3! = 6$. Otra forma. Si A, B, C, D son los amigos, podemos hacer el siguiente árbol, donde una flecha representa dar el libro del amigo donde sale la flecha al amigo donde llega. Iniciamos con A que puede dar a cualquiera de los otros tres y, después, cada uno de ellos solamente puede dar a los otros dos diferentes de A, el último de ellos deberá dar un libro a A.



9) La respuesta es $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Sea M el punto medio del segmento PO. Como $\angle BPO = \angle OBC - \angle POB = 60° - 30° = 30°$, entonces el triángulo BPO es isósceles, por lo que BM es perpendicular a PO. Luego, el triángulo BOM es un triángulo rectángulo con ángulos $30° - 60° - 90°$, por lo que $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}OB = \frac{\sqrt{3}}{2}R$, donde R es el radio de la circunferenca $\mathcal{K}$. Luego, $OP = \sqrt{3}R$.
Se sabe que si dos triángulos comparten un ángulo, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón del producto de los lados adyacentes a los ángulos iguales. Esto es, $\frac{(AOD)}{(BOP)} = \frac{OA \cdot OD}{OP \cdot OB} = \frac{R \cdot R}{\sqrt{3}R \cdot R}$. Por lo tanto, la razón buscada es $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

10) La respuesta es 0. El número 74477447 y cualquier otro número que resulte de reordenar sus dígitos, tiene suma de dígitos igual a $4 \times 4 + 4 \times 7 = 16 + 28 = 44$. Como todo número es congruente con la suma de sus dígitos módulo 3, el número y los que resulten de reordenar sus dígitos, son congruentes a 2 módulo 3, pues $44 \equiv 2 \pmod 3$. Pero un cuadrado perfecto es congruente con 0 o 1, módulo 3. Por lo tanto, no hay ningún cuadrado perfecto que se pueda obtener de esta manera.

11) La respuesta es 24. Por cada 4 chicas que bailan, hay una chica que no baila y, por cada 3 chicos que bailan, hay 2 chicos que no bailan. Los números posibles de parejas que bailan son múltiplos de 12. Para el primer múltiplo de 12, tenemos 12 chicas que bailan y 3 que no bailan y 12 chicos que bailan y 8 que no bailan. En este caso tenemos 12 chicas que bailan, 12 chicos que bailan y 11 personas que no bailan, la suma de estos es $12 + 12 + 11 = 35$, luego las personas que bailan son 24.
Otra forma. Sean a el número de chicos que están en la fiesta y b el número de chicas que están en la fiesta. Tenemos que $a + b = 35$. Como el $60\,\%$ de los chicos están bailando con el $80\,\%$ de las chicas, tenemos que $\frac{3}{5}a = \frac{4}{5}b$, por lo que $b = \frac{3}{4}a$. Luego $a + \frac{3}{4}a = 35$, de donde $a = 20$ y $b = 15$. Por lo tanto, hay $\frac{3}{5}20 + \frac{4}{5}15 = 24$ personas bailando.

12) La respuesta es $15°$. Como el triángulo ADM es equilátero, tenemos que $AM = DM$. Como M es punto medio de AC y $AM = DM$, tenemos que $DM = CM$, por lo que el triángulo DMC es isósceles y $\angle DCM = 30°$. Puesto que $\angle DCM = 30°$ y $\angle DAC = 60°$, resulta que $\angle ADC = 90°$, lo que significa que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico y $\angle ADB = \angle ACB = 45°$. Por lo tanto, $\angle BDM = \angle ADM - \angle ADB = 60° - 45° = 15°$.
Otra forma. Como ADM es un triángulo equilátero, tenemos que $AM = MD = MC$. Luego, A, D y C están en la circunferencia de centro M y radio MA. Como ABC es un triángulo rectángulo y M es el punto medio de AC, resulta que M es el centro de la circunferencia por A, B y C. Luego, el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico y concluimos como en la primera solución.

Parte B

1) Hay al menos una canica verde. Por la condición de cuando se sacan 5 hay a lo más 3 del mismo color, no pueden haber más de 3 del mismo color. Luego, hay otros dos colores de canicas digamos blanco y rojo. No puede haber un cuarto color, ya que si se sacan 4 canicas hay dos del mismo color. Luego, hay tres colores y a lo más hay 3 canicas de un color, pero como son 9 canicas, hay 3 de cada color, en particular hay 3 canicas verdes.

2) Como $\angle AOB$ es un ángulo central del ángulo inscrito $\angle ACB$, si $\angle ACB = \theta$, entonces $\angle AOB = 2\theta = \angle ADB$. Por otra parte, por ser ángulo externo del triángulo ACD, tenemos que $\angle ADB = \angle ACD + \angle DAC$. Luego,

$$\angle DAC = \angle ADB - \angle ACD = 2\theta - \theta = \theta.$$

Por lo tanto, $\angle ACD = \angle DAC = \theta$, por lo que el triángulo ADC es isósceles.

3) Notemos primero que conocer el producto de los cuatro números es equivalente a conocer el producto de los otros dos números. De los 15 productos que hay entre dos de los seis números, solamente hay dos números, el 6 y el 12, que se logran con dos diferentes parejas de números: $1 \times 6 = 2 \times 3 = 6$ y $2 \times 6 = 3 \times 4 = 12$. En el primer caso, la suma de los números elegidos (que son $2, 3, 4, 5$ o $1, 4, 5, 6$) es siempre par. En el segundo caso, la suma de los números elegidos puede ser impar o par (ya que $1+3+4+5 = 13$ o $1+2+5+6 = 14$), que es el caso en que Beto no sabe la paridad. Así que que el producto de los cuatro números elegidos por Ana es $1 \times 3 \times 4 \times 5$ o bien $1 \times 2 \times 5 \times 6$, pero estos dos productos son iguales a 60. Luego, el producto de los cuatro números que eligió Ana es 60.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel II

1) El primer dígito del número debe ser diferente de cero, luego tal dígito se puede elegir de 9 maneras. Una vez elegido el primer dígito, hay 3 lugares donde se puede colocar al otro dígito que sea igual al elegido. Los otros dos dígitos que serán iguales entre sí, se pueden elegir de 9 maneras, basta que sea un dígito diferente al primer dígito elegido. Luego hay $9 \times 3 \times 9 = 243$ números bidigitales.
Otra forma. Si el dígito 0 no se usa, hay $\binom{9}{2}$ maneras de elegir los dos valores de los dígitos que usa el número y hay $\binom{4}{2}$ maneras de acomodar estos dígitos en el número. Luego, hay $\binom{9}{2} \times \binom{4}{2} = \frac{72}{2} \times \frac{12}{2} = 216$ números bidigitales que no usan al cero. Si usan al 0, el primer dígito del número debe ser diferente de cero y hay 9 maneras de elegirlo y hay 3 lugares donde se puede colocar al segundo dígito que sea igual al primero; los otros dos dígitos están obligados a ser 0. Luego, en este caso hay 27 números bidigitales. En total, hay $216 + 27 = 243$ de tales números.

2) Si la fracción es un entero, el numerador debe ser par, por lo que $z = 2k$ para algún k natural. Si la expresión $\frac{10k+64}{2k+2} = \frac{5k+32}{k+1}$ es una potencia de 2, de nuevo $k = 2m$ par algún m natural. Entonces, será suficiente encontrar los números naturales m para los cuales $\frac{10m+32}{2m+1} = 5 + \frac{27}{2m+1}$ es una potencia de 2. Primero veremos para cuáles es entero. Debemos tener que $2m+1$ divide a 27, luego $m \in \{0, 1, 4, 13\}$. Como $5+3$ y $5+27$ son potencias de 2, las únicas posibilidades son $m = 4$ o 0, por lo que $z = 0$ o 16, pero solamente $z = 16$ es positivo. Por lo tanto, la única solución es $z = 16$.

3) Si queremos que la suma entre el producto de los dígitos sea $\frac{2}{3}$, entonces el producto de los dígitos debe ser $3k$ y la suma de estos $2k$, por lo que entre los dígitos debe estar al menos un múltiplo de 3 diferente de 0, esto es, un 3 un 6 o un 9 y, la suma de los dígitos debe ser par. Luego, los números cercanos a 2019 que pueden cumplir son $2006, 2013$ y después de 2019 pueden ser $2026, 2033, \ldots$. Entonces, antes de 2019 el más cercano que es chido es el 2006 (pues $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$) y después de 2019 los números 2026 y 2033 no son números chidos. Así que el número chido más cercano a 2019 es 2006.

4) Un tablero de 2×2 donde la suma de sus números es múltiplo de 3 queda determinado por tres números del tablero. En efecto si a, b y c son números de entre $0, 1, 2$,

entonces $a+b+c$ es uno de los números $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, y cada uno de ellos se puede completar (de manera única) con $0, 2, 1, 0, 2, 1, 0$, respectivamente, para que la suma de los cuatro sea múltiplo de 3.
Luego el tablero de 5×5 quedará determinado por los números que se coloquen en la primera columna y en el primer renglón. Cada uno de estos 9 cuadritos puede ser ocupado por cualquiera de los tres números $0, 1, 2$, por lo que hay 3^9 maneras de llenar el tablero.

5) Tenemos que $PA = PC$ por ser tangentes y, $OA = OC$ por ser radios. Entonces, PO es mediatriz de AC, de donde $AQ = QC$. Luego, $\angle QAC = \angle ACB = \angle ABC$, por lo que CA es tangente a la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo ABQ. Luego, los triángulos isósceles ABC y QCA son semejantes, por lo que $\frac{CQ}{AC} = \frac{AC}{CB}$. Por lo tanto, $CQ = \frac{AC^2}{CB} = \frac{4}{3}$.

6) Si $k \leq 50$ y k es par, los números k y $2k$ pertenecen a la lista y tienen como divisor común a k. Si $k \leq 50$ y k es impar, los números $2k$ y $4k$ pertenecen a la lista y tienen como divisor común a k. Luego, $k \geq 51$. Como $51 \cdot 4 > 200$, se sigue que no hay dos números en la lista múltiplos de 51. Por lo tanto, la respuesta es 51.

7) Los primeros términos de la sucesión son

$$97, 58, 69, 87, 57, 54, 21, 3, 9, 81, 9, 81, \ldots$$

A partir del noveno término se repiten de dos en dos el 9 y el 81. Como 2019 es impar, concluimos que el término 2019 en la sucesión es el 9.

8) Si X es la intersección del lado BC con la circunferencia por A, Z y M, tenemos que A, Z, M y X son concíclicos. Como Z es el centro del cuadrado y M es el punto medio de BC, resulta que $\angle ZMX = 90°$. Luego, ZX es un diámetro de la circunferencia, por lo que $ZX = 2R$, donde R es el radio buscado.
Es fácil ver que $ZM = 1$ y que $\angle AZM = 135°$, por lo que $\angle MXA = 45°$. Además, $\angle ABX$ es recto, por lo que el triángulo ABX es rectángulo isósceles con $BX = AB = 2$. Entonces, $MX = MB + BX = 3$ y, por el teorema de Pitágoras en el triángulo ZXM, tenemos que $ZX^2 = ZM^2 + MX^2$, esto es, $(2R)^2 = 1^2 + 3^2 = 10$, de donde se sigue que $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

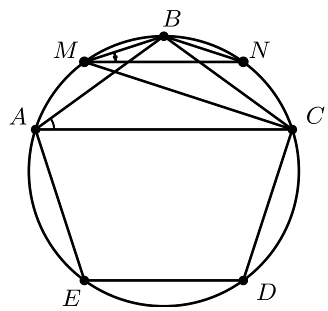
Soluciones de la Prueba Individual, Nivel III

Parte A

1) La respuesta es 54. El número más pequeño que se puede obtener es cuando se acomodan de alguna de las siguientes formas:

$$6 \times 5 \times 1 + 4 \times 3 \times 2 = 54,$$
$$6 \times 4 \times 1 + 5 \times 3 \times 2 = 54.$$

2) La respuesta es $18°$. Si N es el punto medio del arco $\widehat{BC}$ del circuncírculo del triángulo BMC, entonces MN es bisectriz del ángulo $\angle BMC$ y así, $\angle BMN = \frac{1}{2}\angle BMC$.



Como $BMAC$ es cíclico, tenemos que $\angle BMC = \angle BAC$ y, por lo tanto, $\angle BMN = \frac{1}{2}\angle BAC$. Como $BA = BC$, el triángulo BAC es isósceles, de modo que $\angle BAC = \frac{180° - \angle ABC}{2}$ y, como $\angle ABC = 108°$ (pues el pentágono es regular), se sigue que $\angle BAC = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$ y $\angle BMN = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 36° = 18°$.
Otra forma: Sean O, P y Q los puntos medios de los arcos $\widehat{CD}$, $\widehat{DE}$ y $\widehat{EA}$, respectivamente, formando un decágono regular $AMBNCODPEQ$. Entonces,

$$\angle MBN = (\text{ángulo de un decágono regular}) = 180° \left(\frac{10-2}{10}\right) = \frac{4}{5} \times 180°.$$

Como el triángulo MBN es isósceles, resulta que

$$\angle BMN = \frac{1}{2}(180° - \angle MBN) = \frac{1}{2}\left(180° - \frac{4}{5} \times 180°\right) = 18°.$$

3) La respuesta es $\frac{2}{9}$. Hay $\binom{10}{5} = 252$ formas de sacar 5 monedas de la bolsa. Para obtener al menos \$40 hay tres posibilidades:
i) Sacar 5 monedas de \$10.
ii) Sacar 4 monedas de \$10 y cualquier otra moneda.
iii) Sacar 3 monedas de \$10 y 2 de \$5.
Para el caso i), hay $\binom{5}{5} = 1$ manera; para el caso ii) hay $\binom{5}{4} \times \binom{5}{1} = 5 \times 5 = 25$ maneras y, para el caso iii), hay $\binom{5}{3} \times \binom{5}{2} = 10 \times 3 = 30$ maneras. Entonces, la probabilidad de sacar al menos \$40 es $\frac{1+25+30}{252} = \frac{56}{252} = \frac{2}{9}$.

4) Es fácil ver que EF es paralela a AB. Luego, $(APB) = (AFB)$. Ahora, como $BF = 2$ cm y $BD = 2 + 6 + 2 = 10$ cm, tenemos que $\frac{(ABF)}{(ABD)} = \frac{BF}{BD} = \frac{2}{10}$, por lo que $(ABP) = (ABF) = \frac{2}{10}(ABD) = \frac{1}{10}(ABCD) = 4$ cm^2. Análogamente, obtenemos que $(BQC) = (CRD) = (DSA) = 4$ cm^2. Por lo tanto, el área de la estrella es $(ABCD) - (APB) - (BQC) - (CRD) - (DSA) = 40 - 4 \times 4 = 24$ cm^2.

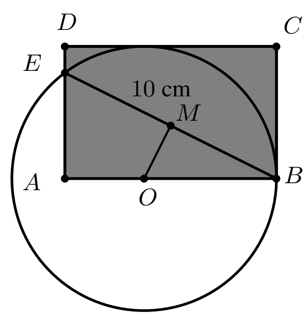
5) Ver la solución del Problema 11 de la Prueba Individual del Nivel II.

6) La respuesta es 11520 formas. Primero vamos a acomodar las letras E. Como hay 8 vértices, hay 8 maneras de acomodar la primera letra E. Luego, estamos ocupando ya 4 vértices (donde colocamos la primera E y los tres vértices que se unen a este vértice por una arista), por lo que la segunda E la podemos acomodar de 4 maneras. Entonces, hay 8×4 maneras de acomodar las letras E, pero como estas son iguales dividimos 8×4 entre 2 para evitar repeticiones. El resto de las letras no tienen restricción, por lo que hay $6!$ maneras de acomodarlas. Por lo tanto, en total son $16 \times 6! = 11520$ maneras de acomodar las ocho letras.

7) Ver la solución del Problema 10 de la Prueba Individual del Nivel II.

8) La respuesta es 50 cm^2. Sean O el centro de la circunferencia y M el punto medio de la cuerda BE. Como los triángulos ABE y MBO son semejantes, tenemos que $\frac{AB}{BE} = \frac{MB}{BO}$ y, por lo tanto,

$$(ABCD) = AB \times BC = AB \times BO = BE \times MB = 10 \times 5 = 50 \ \text{ cm}^2.$$



9) La respuesta es 3. Note que 2019 es divisibe entre 3, pero no es divisible entre 9. La suma de dos cuadrados a^2+b^2 es un múltiplo de 3 solamente en el caso de que tanto a como b sean múltiplos de 3 (ya que el residuo al dividir entre 3 a un cuadrado es 0 o 1), pero entonces $a^2 + b^2$ es múltiplo de 9. Luego 2019 no puede ser la suma de dos cuadrados perfectos. Como $2019 = 5^2 + 25^2 + 37^2$, la menor cantidad de sumandos que se necesitan para escribir a 2019 como suma de cuadrados es 3.

10) La respuesta es 80. Los subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ los dividimos en dos tipos, los que tienen al número 5 y los que no lo tienen. Hay una biyección entre estos dos tipos de conjuntos: A un conjunto A que tenga al 5, le asignamos el conjunto $A - \{5\}$. Por ejemplo, si el conjunto es $A = \{5\}$, entonces $A - \{5\}$ es el conjunto vacío y la suma con signos alternados del conjunto vacío es 0). Conjuntos con el 5 hay 16 y las sumas alternadas de A y $A - \{5\}$, cumplen que al sumarlas da 5. Luego, la suma que nos piden es $16 \times 5 = 80$.

11) Ver la solución del Problema 6 de la Prueba Individual del Nivel II.

12) La respuesta es 4. Formemos el polinomio $p(x) = f(x) + g(x) - 2019$. Como $f(x)$ y $g(x)$ son de grado 2, entonces el grado de $p(x)$ es menor o igual que 2, pero

$p(a) = p(b) = p(c) = 0$, por lo que el polinomio $p(x)$ es el polinomio cero. Luego, $p(x) = f(x) + g(x) - 2019 = 0$, por lo que $g(x) = 2019 - f(x)$, de donde se obtiene que $g(d) = 2019 - f(d) = 2019 - 2015 = 4$.

Parte B

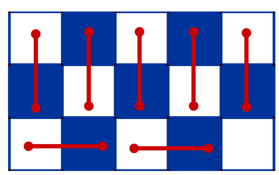
1) Ver la solución del Problema 8 de la Prueba por Equipos del Nivel II.

2) Escribimos $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ y $m = p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$, donde $p_1, \ldots, p_k$ son los primos que aparecen en las factorizaciones de n y m y, además los exponentes a_i, b_i son enteros no negativos. Como $n^2 \cdot m^3$ es una quinta potencia, para cada i debemos de tener que $2a_i + 3b_i \equiv 0 \pmod 5$. De aquí que para cada i,

$$0 \equiv 5a_i + 5b_i \equiv 2a_i + 3b_i + 3a_i + 2b_i \equiv 3a_i + 2b_i \pmod 5.$$

Por lo tanto, $m^2 \cdot n^3$ también es una quinta potencia.

3) Coloreamos las cajas como tablero de ajedrez, con las esquinas blancas. El número de cajas blancas es 8 y el de negras es 7. Podemos pensar que las canicas heredan el color de la caja. Luego hay $8 \times 7 = 56$ canicas blancas y $7 \times 7 = 49$ canicas negras. En cada tirada se saca una canica de cada color. Luego, a lo más se pueden hacer 49 tiradas, donde se sacan 49 canicas de cada color, por lo que quedan entre las cajas blancas 7 canicas. Luego, el menor número de canicas que puede quedar es mayor o igual a 7. Se puede tirar de la siguiente manera,



donde cada segmento representa la tirada donde se escogen las dos cajas señaladas. Así se muestra que se sacan las canicas de todas las cajas salvo la de la caja de la esquina inferior derecha, que tiene 7.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel III

1) Sea ABC un triángulo acutángulo. Podemos suponer que las medidas de sus ángulos cumplen que $A \leq B \leq C$. Entonces $6A = C < 90°$, pues ABC es acutángulo. Luego, el valor más grande de C es cuando $6A = C = 84$, es decir, $A = \frac{84}{6} = 14°$. Luego, $B = 180 - 14 - 84 = 82°$. Si $C \leq 84 - 6 = 78°$, entonces $A \leq \frac{78}{6} = 13°$ y $B \geq 180 - 78 - 13 = 89°$, lo cual no es posible porque $C \leq 78°$ es el ángulo más grande. Por lo tanto, los ángulos del triángulo ABC miden $14°$, $82°$ y $84°$.

2) Ver la solución del Problema 7 de la Prueba por Equipos del Nivel II.

3) Para $1 \leq j \leq 13$, sea a_j la cantidad de formas de ir del j-ésimo 1 (de izquierda a derecha) al número 7. Entonces, un camino que va del j-ésimo 1 al 7 (para $1 \leq j \leq 7$) tiene que ir $7 - j$ veces a la derecha y $j - 1$ veces hacia abajo (es fácil ver que no puede ir hacia arriba ni hacia la izquierda por como son los caminos). Es decir, en total debe hacer 6 movimientos. Esto se puede hacer de $\binom{6}{j-1}$ maneras, esto es, $a_j = \binom{6}{j-1}$ para $1 \leq j \leq 7$. Por la simetría de la figura, tenemos que $a_j = \binom{6}{13-j}$ para $8 \leq j \leq 13$. Luego, el número total de caminos que van de algún 1 al 7 es

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{13} = \sum_{j=1}^{7} \binom{6}{j-1} + \sum_{j=8}^{13} \binom{6}{13-j} = 2^6 + (2^6 - 1) = 2^7 - 1,$$

esto debido a la identidad $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$ y a que $\binom{6}{6} = 1$.
Por lo tanto, el número total de caminos es $2^7 - 1 = 127$.

4) Como M es el reflejado de D con respecto a la recta AC, tenemos que AC y DM son perpendiculares y $CD = CM$. Por ser DA y DC las tangentes desde D a Γ, tienen la misma longitud. De aquí, obtenemos que $\angle MCA = \angle ACD = \angle DAC$ y, por lo tanto, las rectas AD y CM son paralelas. Análogamente, obtenemos que las rectas CN y EB son paralelas.
Si C, M y N están alineados, entonces AD y BE son paralelas. Pero como AD y BE son tangentes a Γ, tenemos que AB es un diámetro de Γ y, por lo tanto, $\angle ACB = 90°$.

5) Supongamos que v_A, v_B y v_C son las velocidades de los corredores A, B y C, respectivamente. Sean t_A, t_B y t_C los tiempos en que tardan en llegar a la meta (desde un punto inicial común) los corredores A, B y C, respectivamente. Si d es la distancia de la carrera, tenemos que

$$\begin{aligned} v_A t_A &= v_B t_B = d, \\ v_B t_A &= d - 2, \\ v_C t_A &= d - 2.98, \\ v_C t_B &= d - 1. \end{aligned}$$

Como $\frac{t_A}{t_B} = \frac{v_B t_A}{v_B t_B} = \frac{d-2}{d}$ y $\frac{t_A}{t_B} = \frac{v_C t_A}{v_C t_B} = \frac{d-2.98}{d-1}$, tenemos que

$$(d-2)(d-1) = (d-2.98)d,$$

de donde $0.02d - 2 = 0$. Por lo tanto, $d = 100$ metros.

6) Observemos que la suma de dos números de una tripleta Eliana es divisible entre el otro si y solo si la suma de los tres números es divisible entre cada uno de los tres números de la tripleta. Si llamamos n a la suma de los números de la tripleta, entonces debemos encontrar tres divisores de este número cuya suma sea igual a n. Ahora, si expresamos a esos divisores como fracción de n, tenemos que encontrar tres enteros positivos mayores o iguales a 2 de tal forma que sus recíprocos sumen 1 (ya que, $\frac{n}{a} + \frac{n}{b} + \frac{n}{c} = n \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$). Si el menor de ellos fuera mayor o

igual a 3, la suma de los tres sería a lo más $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<1$. Por lo tanto, el menor es 2 y uno de los números debe ser la mitad de n. Si el segundo menor fuera 4 o mayor, la suma no podría ser 1 pues $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<1$, por lo cual el segundo número debe ser 3. Luego, el último número debe ser 6. Ahora, el número n debe ser múltiplo de 6. Luego, el producto de esos tres números es $\frac{n}{2}\times\frac{n}{3}\times\frac{n}{6}=\frac{n^3}{36}$. Como $\frac{n^3}{36}$ debe de ser menor o igual a 2019 y, como queremos maximizar n, tomando en cuenta que n debe de ser múltiplo de 6, se observa que $\frac{42^3}{36}=7\times 7\times 42=2058>2019$ y que $\frac{36^3}{36}=36\times 36=1296<2019$. Por lo tanto, la máxima suma posible es 36.

7) Notemos que $\angle QPM=90^\circ=\angle APD$. Sean $\alpha=\angle PAD$ y $\beta=\angle PDA$. Entonces, $\alpha+\beta=90^\circ$. Además, $\angle MAB=\angle MAD=\alpha$ por la bisectriz AM y $\angle AMB=90^\circ$, por lo que $\angle ABM=90^\circ-\alpha=\beta=\angle MBC$ por la bisectriz BM. Como $\angle DAB=2\alpha$ y $\angle ABC=2\beta$, tenemos que $\angle DAB+\angle ABC=180^\circ$, por lo que AD y BC son paralelas. Análogamente, AB y DC son paralelas. Por lo tanto, el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo y, $AD=BC$ y $AB=CD$. También tenemos que $\angle DPM=90^\circ$ y $\angle PDM=\beta$, por lo que $\angle PMD=\alpha$. Luego, el triángulo ADM es isósceles, de donde $AD=DM$. Análogamente, obtenemos que $BC=CM$, por lo que $CD=2AD$. Por lo tanto,
$$\frac{AB+CD}{BC+DA}=\frac{2CD}{2AD}=\frac{2\cdot(2AD)}{2AD}=2.$$

8) Notemos que cuando hacemos la suma de todos los subtableros de 2×2 (de los cuales hay 16), los números de las esquinas del tablero de 5×5 se cuentan una sola vez (hay solamente un subtablero que lo cubre), los números de los cuadritos de las orillas que no son esquinas se cuentan dos veces (solamente hay dos subtableros que lo cubren) y los números de los otros cuadritos se cuentan cuatro veces (hay cuatro subtableros que lo cubren). La suma S de los 16 subtableros de 2×2 es mayor o igual a
$$\begin{aligned}&(25+24+23+22)+2(21+20+\cdots+10)+4(9+8+\cdots+1)\\&=94+2(186)+4(90)\\&=666,\end{aligned}$$
esto es, $666\leq S$.
Ahora, si en cada subtablero de 2×2 la suma de los números de sus cuadritos es menor o igual a 41, la suma de los números de los 16 subtableros de 2×2 será menor o igual a $16\times 41=656$, esto es $S\leq 656$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, hay un subtablero de 2×2 cuyos números suman más de 41.

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2020, No. 4

Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica de la Ciudad de México

En la Ciudad de México, se realiza el Concurso de Primaria y Secundaria cada ciclo escolar. Las inscripciones se abren en julio y la primera, segunda y tercera etapa se llevan a cabo en septiembre, octubre y diciembre, respectivamente. En la primera etapa participan alrededor de 25000 niños y niñas de la CDMX. Para la segunda etapa se selecciona al 5 % de cada escuela, de manera que todas las escuelas inscritas tienen alumnos participando. Para la tercera etapa se invita alrededor de 400 participantes. Entre la tercera y cuarta etapa, hay alrededor de seis entrenamientos para prepararlos, por lo que en la tercera etapa se seleccionan alrededor de 100 participantes. Los ganadores de la cuarta etapa conforman la preselección y asisten al Concurso Regional de Educación Básica Zona Centro, que usualmente se celebra en el mes de abril. Los exámenes selectivos constan de 4 exámenes individuales y 4 exámenes por equipos, tratando de simular el formato del Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB).

Los alumnos ganadores de la cuarta etapa del nivel I de la OMMEB de la Ciudad de México del ciclo escolar 2019-2020 fueron:

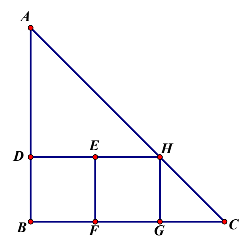
1. Stefano Serrano Lefler.
2. Yara Peimbert Pichardo.
3. José Luis Romero Beristain.
4. Takumi Higashida Martínez.
5. Samuel Arath Cisneros Rosales.
6. Jerónimo Bernal Fernández.
7. Maia Barnetche Campos.
8. Andrés Jacobo Kaim.
9. Iker López Sotelo.

Prueba Individual, Nivel I, Cuarta Etapa

Ciudad de México, 14 de marzo de 2020

1) El lado de cada uno de los triángulos equiláteros de la figura es el doble del lado del hexágono regular del centro. ¿Qué fracción del área total de los seis triángulos, representa el área del hexágono?

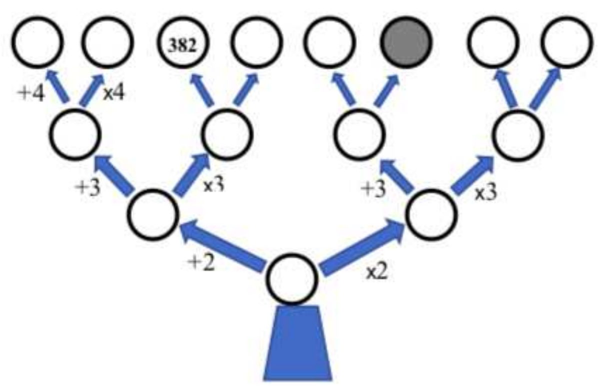
2) En la asamblea de raperos la mitad de los asistentes lleva gorra; la tercera parte lleva camisetas gigantes; la octava parte lleva gorra y camiseta gigante; y hay 63 raperos que no llevan ni gorra ni camiseta gigante. ¿Cuántos raperos hay en la asamblea?



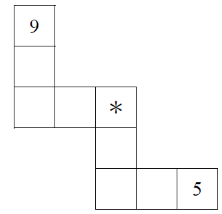
3) En la figura, el triángulo ABC es isósceles y rectángulo. Además, $BDEF$ y $EFGH$ son cuadrados. Si el área del cuadrado $EFGH$ es 10 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo ABC?

4) Ana Pau convierte cada palabra en un número, asignando a todas las vocales un mismo valor y a todas las consonanates otro valor y sumando todos los valores de sus letras. Si una NARANJA se transforma en 100 y una FRESA en 72, ¿en qué número se convierte la palabra APOLONIO?

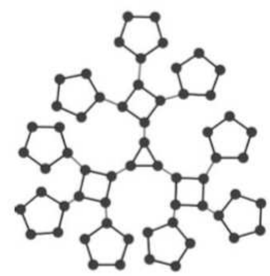
5) Observa cómo crece este árbol numérico. Desde la bolita inicial crece n bolitas hacia la izquierda sumando $2, 3, 4, \ldots$ y hacia la derecha multiplicando por $2, 3, 4, \ldots$ Solo sabes que en una bolita del cuarto piso está el número 382. ¿Qué número estará en la bolita sombreada?



6) Los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 se escriben en los cuadrados de tal manera que en cada columna y en cada renglón con tres números, suman 13. Dos números ya han sido escritos. ¿Cuál es el número que queda en el cuadrado marcado con $*$?



7) El año pasado en el Zócalo utilizaron motivos geométricos para iluminar las calles en Navidad. El diseñador ha comenzado formando un triángulo con tres luces led en los vértices. De cada vértice del triángulo sale un cuadrado con luces en los vértices y de cada vértice libre de los cuadrados un pentágono. El diseñador quiere ahora continuar poniendo hexágonos en los vértices libres de los pentágonos. ¿Cuántas luces necesita en total para culminar su obra?

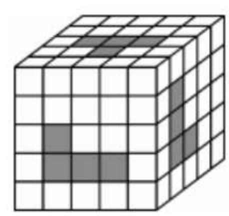


8) Si seis gallinas ponen 100 huevos en 8 días, ¿cuántas gallinas harán falta para poner 200 huevos en 4 días?

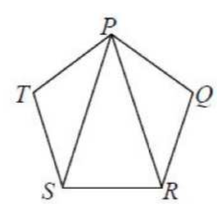
9) Diego y Ana van a plantar algunos árboles en el patio. Quieren plantar 6 árboles de manzana, 2 árboles de pera y 1 de durazno en una sola fila. ¿De cuántas maneras posibles pueden hacer el acomodo de los árboles?

10) Si recortamos con una línea recta una cuadrícula de 4×4 casillas, ¿cuántas casillas como máximo puede cortar esa recta?

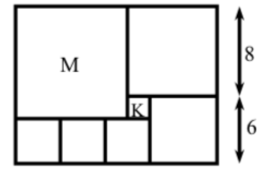
11) Ana arma un cubo con cubitos más pequeños como se muestra en la figura. Las partes sombreadas arriba, enfrente y a la derecha muestran los cubos que Leo, el travieso, quitó hasta llegar a la cara opuesta del cubo (de manera que queda un hueco en el cubo en forma de L si lo miras de frente y así para las tres figuras). ¿Cuántos cubitos quedan en el cubo después de que Leo hace esta travesura?



12) Para dibujar esta figura sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma línea, ¿en qué puntos podrías comenzar?



13) El rectángulo que observas está formado por 7 cuadrados de los cuales, como ves, hay tres iguales. M es el mayor y K es el más pequeño. ¿Cuántos cuadrados como K caben en M?



14) En una pizzería hay 8 ingredientes de carne y 10 ingredientes de vegetales. Si quieres armar tu pizza con 3 tipos de carne y 5 tipos de vegetales, ¿de cuántas maneras puedes armar tu pizza?

15) Acomoda los números del 1 al 9 sin repeticiones en la cuadrícula de manera que cada número aparezca una vez y el resultado de multiplicar los números de la primera fila sea 12, de la segunda fila sea 112, de la primera columna sea 216 y de la segunda columna sea 12 como se indica en la figura. ¿Cuánto vale la suma de los números que van en los cuadrados señalados con A, B y C?

A			12
	B		112
		C	
216	12		

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2021, No. 1

4ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 14 al 19 de octubre de 2020 se llevó a cabo el Concurso Nacional de la 4^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) de manera virtual. Participaron 80 estudiantes de primaria, representando a 27 entidades federativas y, 176 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas. La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

Los ganadores de medalla de oro y medalla de plata en la prueba individual junto con los ganadores de medalla de oro en la prueba por equipos en cada nivel, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán

a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2021 de forma virtual.
A continuación, listamos los nombres de los alumnos que integran la preselección nacional, así como los problemas y soluciones de las pruebas individual y por equipos del Nivel I de la 4^a OMMEB.

Nombre	**Estado**	**Medalla**
Artie Aarón Ramírez Villa	Jalisco	Oro
Oscar Alexander Macgregor de la Cruz	Tabasco	Oro
Takumi Higashida Martínez	Ciudad de México	Oro
Yara Peimbert Pichardo	Ciudad de México	Oro
Zariffe Yamel Céspedes Pelayo	Hidalgo	Oro
Olaf Daniel Magos Hernández	Nuevo León	Plata
Rodrigo Saldivar Mauricio	Zacatecas	Plata
Antonio Gutiérrez Meléndez	Coahuila	Plata
Ian Santiago López Ramírez	Hidalgo	Plata
Jorge Alexander Partida León	Sinaloa	Plata
Andrea Estefanía Estrada Callejas	Hidalgo	Plata
Ángel Emmanuel Ruiz Delgado	Zacatecas	Plata
Dana Karen Medina González	Yucatán	Plata
Emmanuel Esquer Coutiño	Morelos	Plata
Gauss Becerra Reynoso	Jalisco	Plata
Isaac Emanuel Rodríguez Ibarra	Chihuahua	Plata
Keira Yaneth Arvizu Islas	Tamaulipas	Plata
Lucía Mtanous Ramos	Coahuila	Plata

En la prueba por equipos en el Nivel I, el Estado de Jalisco obtuvo el primer lugar (con 205 puntos), los Estados de Coahuila y Guanajuato obtuvieron el segundo lugar (con 160 puntos) y la Ciudad de México obtuvo el tercer lugar (con 95 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel I fueron:
Primer lugar: Jalisco (con 290 puntos). Segundo lugar: Coahuila (con 250 puntos). Tercer lugar: Guanajuato y Ciudad de México (con 220 puntos).

Prueba Individual, Nivel I

1) Nàm escribió un número en su cuaderno al cual multiplicó por 3, al resultado le sumó 3, después dividió entre 3, por último restó 3. Si su resultado final fue 3, ¿qué número escribió Nàm en su cuaderno?

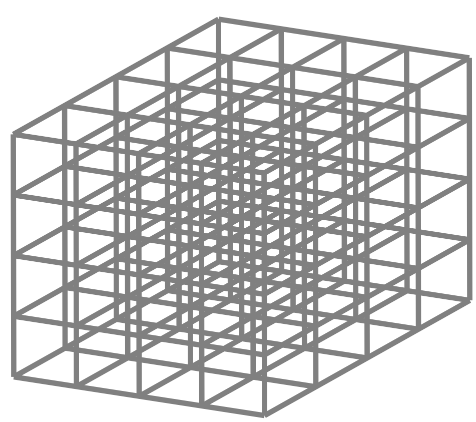
2) En cada cuadrito de la siguiente tabla se quiere escribir un número entre el $1, 2, 3, 4$ y 5, de tal manera que por un lado la suma de los números en cada renglón sea la misma y, por otro lado, la suma de los números en cada columna sea la misma. Ya se escribieron algunos de los números. ¿Cuál es la suma de los 6 números de los cuadritos?

1		4
	2	

3) Se va a aplicar un examen en el auditorio de la escuela. El auditorio tiene 20 filas de asientos, la primera fila tiene 10 asientos y cada fila sucesiva tiene un asiento más que la fila anterior. Para hacer el examen, los alumnos se deben sentar de manera que en una fila de asientos, entre cada dos alumnos deben quedar dos asientos vacíos. ¿Cuál es el máximo número de alumnos que pueden sentarse en el auditorio?

4) Diana va a colorear los números enteros positivos con uno de los colores verde, blanco y rojo, siguiendo las siguientes indicaciones:
(i) La suma de dos números (que pueden ser iguales) pintados de verde, se pinta de rojo.
(ii) La suma de dos números (que pueden ser iguales) pintados de rojo, se pinta de verde.
(iii) La suma de dos números, uno pintado de verde y otro pintado de rojo, se pinta de blanco.
Si inicia pintando al número 1 de rojo, ¿de qué color quedará pintado el número 2020?
Si concluyes que el color del 2020 es el verde, escribe como respuesta: 1; si concluyes que es el blanco, escribe como respuesta: 2; si concluyes que se colorea de rojo, escribe como respuesta: 3.

5) Se quiere construir una alambrada en forma de cubo de dimensiones 4 cm $\times 4$ cm $\times 4$ cm de manera que la alambrada quede dividida en cubitos de 1 cm $\times 1$ cm $\times 1$ cm como se ve en la figura. ¿Cuántos centímetros de alambre se necesitan?

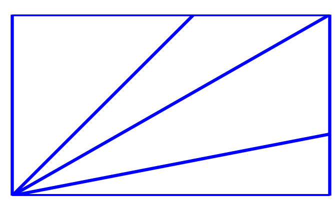


6) Un pintor realizó un mural con puros cuadrados. El primer día pintó un cuadrado de 1 m $\times 1$ m, el segundo día pintó uno de 1 m $\times 1$ m y otro de 2 m $\times 2$ m, el tercer

día pintó cuadrados de 1 m $\times 1$ m, 2 m $\times 2$ m y de 3 m $\times 3$ m y así sucesivamente. Después de haber pintado 250 metros cuadrados en total, el pintor se detuvo. ¿Qué cantidad de metros cuadrados pintó el último día el pintor?

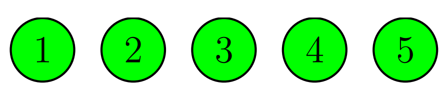
7) Se tienen tres cajas de las cuales una contiene dos bolas, cada una marcada con el número 1; otra contiene dos bolas, cada una marcada con el número 2, y la tercera contiene una bola marcada con el 1 y una bola marcada con el 2. Los contenidos están indicados con las etiquetas 11, 22 y 12 que han sido equivocadamente pegadas en las cajas, de suerte que ninguna de las cajas lleva la etiqueta correcta. Para restituir a cada caja la etiqueta que le corresponde, se permite entreabrir una caja, solo el tiempo necesario para ver que número tiene una de las bolas. ¿Qué etiqueta tiene la caja que se debe destapar?

8) En la siguiente figura hay un rectángulo que se ha dividido en triángulos. ¿Cuántos ángulos agudos hay en la figura?
Nota: *Un ángulo agudo es uno cuya medida es menor a* $90°$.

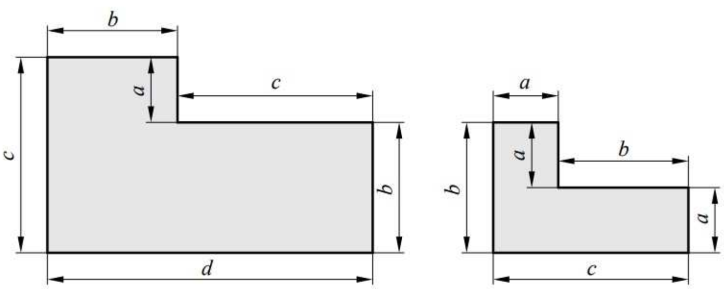


9) Cada número de 3 cifras decimales se divide entre la suma de sus 3 cifras y da un resultado. Por ejemplo, el número 207 se divide entre $2 + 0 + 7 = 9$ dando como resultado $\frac{207}{9} = 23$. ¿Cuál es el mayor valor que se puede obtener como resultado, al considerar todos los números de tres cifras?

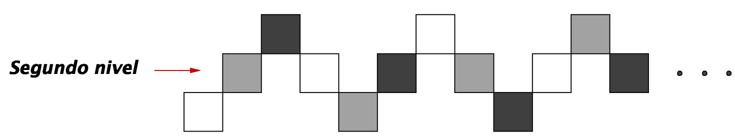
10) Usando las siguientes fichas se pueden formar 325 números diferentes. Algunos números usan solamente una ficha, otros usan dos fichas y otros usan tres, cuatro o cinco fichas. ¿Cuántos de estos números no son múltiplos de 9?



11) ¿Cuál es la razón del área de la figura de la izquierda entre el área de la figura de la derecha?

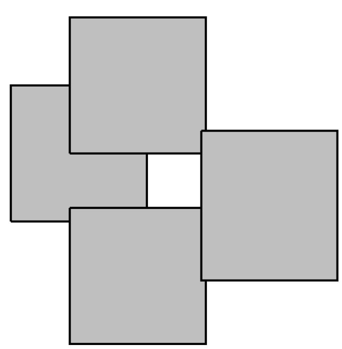


12) Se acomodan cuadrados formando escalones como en la figura hasta tener 2020 cuadrados acomodados.



Estos cuadrados se colorean intercalando los colores blanco, gris y negro. ¿Cuántos cuadrados del segundo nivel de los escalones se colorean de color gris?

13) La siguiente figura se formó traslapando (encimando) cuadrados de área 81 cm^2 cada uno y el cuadrado que se forma en el centro tiene área 9 cm^2. Si el cuadrado de arriba está exactamente arriba del cuadrado de abajo, es decir, los lados verticales de los dos cuadrados están alineados, ¿cuánto vale el área sombreada?

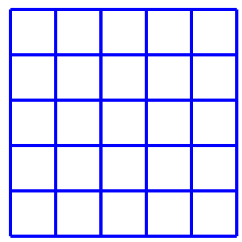


14) Considera todos los enteros positivos de la forma

$$1,\ 12,\ 123,\ \ldots, 1234567891011, \ldots$$

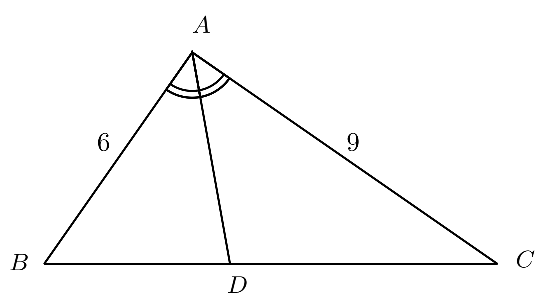
que resultan de escribir consecutivamente los primeros enteros.
De los números anteriores, ¿cuántos dígitos tiene el número más pequeño donde aparece la cadena de números 2022?
Nota: *Por ejemplo, el número más pequeño en el que aparece la cadena* 91 *es el décimo número, esto es, el número* 12345678**91**0.

15) Un gusano deberá recorrer todos los segmentos de la siguiente cuadrícula. Si recorre un segmento cada día, ¿cuál es el menor número de días que necesita el gusano para recorrer la cuadrícula?
Nota: *El gusano puede recorrer 2 o más veces un segmento y no da saltos.*



Prueba por Equipos, Nivel I

1) Sean ABC un triángulo con $AB = 6$, $AC = 9$ y D un punto del segmento BC tal que AD es bisectriz del ángulo $\angle A$. Si el área del triángulo ABD es igual a 8, ¿cuál es el área del triángulo ABC?

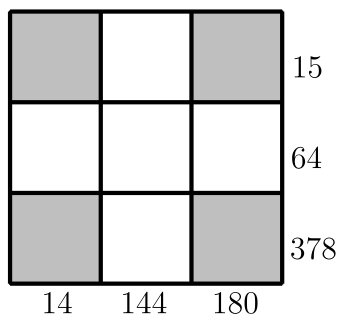


2) Ana y Eva juegan alternadamente a colocar fichas en las casillas de una cuadrícula de 9×9, con las tres reglas siguientes:

   I) en cada casilla vacía se coloca una sola ficha,
   II) en un turno pueden colocar 1, 2 o 3 fichas,
   III) perderá la que coloca la última ficha.

   Si inicia Ana, ¿quién gana?, describe la estrategia que debe seguir para ganar.

3) Los números enteros del 1 al 9 se escriben en los cuadros de la siguiente cuadrícula, uno en cada cuadro sin repetir. Los números que están a la derecha de cada fila son el producto de los dígitos escritos en la fila. Los números que están abajo de cada columna son el producto de los dígitos escritos en la columna. Encuentra el valor de la suma de los números escritos en los cuadros de las esquinas de la cuadrícula.



4) ¿Cuántos números de tres dígitos abc (con $a \neq 0$), tienen la propiedad de que los números de dos dígitos ab y bc son números primos?
Nota. *El número* 137 *tiene la propiedad ya que* 13 *y* 37 *son primos, pero el número* 139 *no la tiene ya que* 39 *no es primo.*

5) Un número entero se dice que es *ocholate* si cumple las siguientes condiciones:

   I) Todos sus dígitos aparecen en orden creciente.

   II) Es múltiplo de 8.

   De los números ocholates de cuatro cifras, ¿cuál es la diferencia entre el mayor y el doble del menor de ellos?
   Nota. *El número* 1456 *es ocholate y los números* 1240*,* 1448 *no son ocholates.*

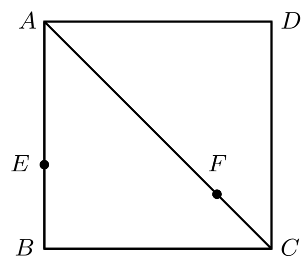
6) Usando solo los vértices de un cubo se pueden formar 56 triángulos. ¿Cuántos de estos triángulos son escalenos, es decir tienen sus tres lados de longitudes diferentes?

7) ¿Cuántos números hay en la lista $1, 2, 3, \ldots, 2019, 2020$ que tengan al menos un dígito igual a 2 o un dígito igual a 0?

8) Sean $ABCD$ un cuadrado con medida de sus lados igual a 5 cm. E es un punto en el lado AB con $AE = 3$ cm y F es un punto en la diagonal AC con $AF = 4FC$. Encuentra,

   I) El valor del área, en cm^2, del triángulo DEF.

   II) Las medidas de los ángulos, en grados, del triángulo DEF.



Soluciones de la Prueba Individual, Nivel I

1) La respuesta es 5. Si en el último paso restó 3, significa que el número antes de este paso era $3 + 3 = 6$. Como en el paso anterior dividió entre 3, entonces el número antes de este paso era $6 \times 3 = 18$. Como en el paso anterior sumó 3, significa que el número antes de este paso era $18 - 3 = 15$. Por último, como al principio multiplicó por 3, significa que el número que escribió Nàm era $\frac{15}{3} = 5$.

2) La respuesta es 18. Como la primera columna tiene un 1, la máxima suma de columna es menor o igual que $1 + 5$ y, como la última columna tiene un 4, la mínima suma por columna es $4 + 1 = 5$. Entonces, la suma por columna debe ser 5 o 6. Los dos casos se muestran a continuación:

1	3	4
4	2	1

1	4	4
5	2	2

Como solo el segundo arreglo cumple con la condición de renglones, la suma buscada es $3 \times 6 = 18$.

3) La respuesta es 137. En las filas 1, 2 y 3 se pueden sentar a lo más 4 alumnos; en las filas 4, 5 y 6 se pueden sentar a lo más 5 alumnos y así sucesivamente, la cantidad de alumnos aumenta en 1 cada tres filas. En total se pueden sentar a lo más $3(4) + 3(5) + \cdots + 3(9) + 2(10) = 137$ alumnos.

4) La respuesta es 3. Revisando los primeros casos se puede ver que el 2 se colorea de verde, el 3 de blanco, el 4 de rojo, el 5 de verde, el 6 de blanco y así sucesivamente. En los primeros, casos los números rojos dejan residuo 1 al dividirse entre 3; los números verdes dejan residuo 2 y los números blancos dejan residuo 0. Este patrón va a seguir, ya que, si sumamos dos números congruentes con 1 módulo 3, obtenemos un número congruente con 2 módulo 3 y, si sumamos dos números congruentes con 2 módulo 3, obtenemos un número congruente con 1 módulo 3. Por lo tanto, como 2020 deja residuo 1 al dividirse entre 3, podemos asegurar que se pinta de color rojo.

5) La respuesta es 300. La alambrada se puede pensar como la unión de tiras de alambre de 4 cm que se colocan en tres direcciones: “ancho”, “fondo” y “alto”. Como en cada dirección se usan 25 tiras, se necesitan $3 \times 25 \times 4 = 300$ cm de alambre.

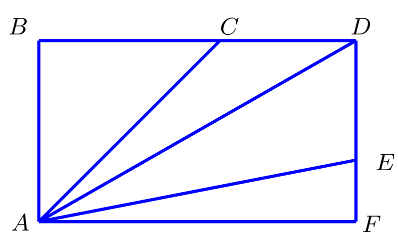
6) La respuesta es 54. En la siguiente tabla, se puede observar la cantidad de área que va pintando el pintor día a día hasta superar los 250 metros cuadrados en total.

Día	No. de cuadritos pintados	m^2 acumulados
1	1	1
2	5	6
3	14	20
4	30	50
5	55	105
6	91	196
7	140	336

Esto indica que el pintor se detuvo en el día 7 y ese día pintó $250 - 196 = 54$ m^2.

7) La respuesta es 12. Esta caja es la única que viendo una bola podemos afirmar qué número tiene la otra. De entrada sabemos que las dos bolas tienen el número. Sin pérdida de generalidad, supongamos que nos encontramos con las dos bolas que tienen el 1, a esa caja le debe corresponder la etiqueta 11. Como sabemos que la caja con la etiqueta 22 no tiene las dos bolas con el número 2 y ahora tampoco las dos con el número 1, entonces a esa caja le debe corresponder la etiqueta 12 y a la que tenía la 11 le corresponde la 22.

8) La respuesta es 13. Sean A, B, D, F los vértices del rectángulo, C y E puntos en los lados BD y DF, respectivamente. Solamente hay ángulos agudos alrededor de los puntos A, C, D y E.



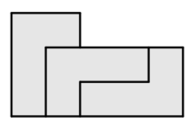
En el vértice A concurren 5 segmentos por lo que hay $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ ángulos, todos ellos menores o iguales a $90°$ y, solamente uno de ellos, es recto. Entonces, en A hay 9 ángulos agudos. En los vértices C y E hay un ángulo agudo en cada uno de ellos y en el vértice D hay 2 ángulos agudos. Luego, en total hay 13 ángulos agudos.

9) La respuesta es 100. Notamos primero que el cociente entre dos números es más grande cuando el numerador es lo máximo posible y el denominador es lo mínimo

posible. Si la suma de cifras es cualquier número entero entre 1 y 9, lo máximo que puede ser el cociente es 100 pues, por ejemplo si la suma fuera 7, el mayor numerador que puede tener suma de dígitos igual a 7 es 700 y entonces $\frac{700}{7} = 100$. Si la suma de los dígitos es 10 o más, como el numerador a lo más es 999, entonces el cociente es menor o igual a $\frac{999}{10} = 99.9$.

10) La respuesta es 311. Encontremos la cantidad de números que **sí** son múltiplos de 9. Con una sola ficha no hay múltiplos de 9, tampoco usando 4 o 5 fichas se puede formar un múltiplo de 9. Con dos fichas se pueden formar dos múltiplos de 9, si se escogen las fichas 4 y 5 (el 45 y el 54). Con tres fichas hay dos ternas que sirven $\{1, 3, 5\}$ y $\{2, 3, 4\}$ y en cada caso hay 6 números múltiplos de 9 que se pueden formar. Luego hay $2 + 6 + 6 = 14$ números de los que se forman que son múltiplos de 9. Por lo tanto, de los que no son múltiplos de 9 hay $325 - 14 = 311$.

11) La respuesta es 3. Observa la siguiente figura.



La razón de las áreas es 3.
Solución alternativa. La razón de las áreas es

$$\frac{ab + db}{aa + ac} = \frac{b(a + d)}{a(a + c)}.$$

Sustituyendo $b = 2a$, $c = b + a = 3a$ y $d = c + b = 3a + 2a = 5a$, obtenemos que

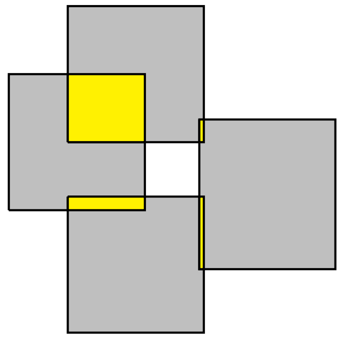
$$\frac{ab + db}{aa + ac} = \frac{2a(a + 5a}{a(a + 3a)} = \frac{2(6a)}{4a} = 3.$$

12) La respuesta es 337. Los cuadros aparecen en la siguiente sucesión, en donde se han subrayado los cuadros del segundo nivel y se ha indicado con B a un cuadro blanco, con G a un cuadro gris y con N a un cuadro negro:

$$B\ \underline{G}\ N\ \underline{B}\ G\ \underline{N} \quad B\ \underline{G}\ N\ \underline{B}\ G\ \underline{N} \cdots$$

Notamos que la sucesión se repite cada 6 términos y que exactamente ahí aparece un cuadro gris en el segundo nivel. Como $2020 = 6 \times 336 + 4$, la respuesta es 337.

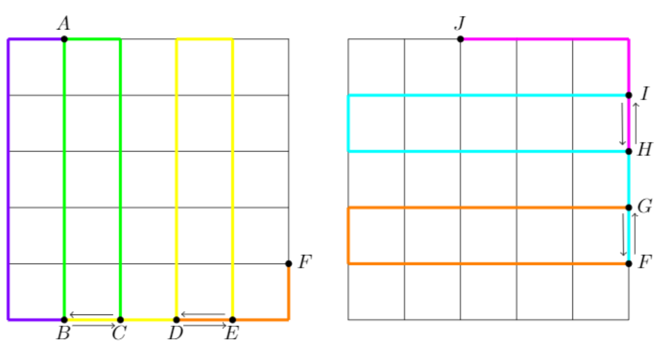
13) La respuesta es 288 cm^2. En la siguiente figura se puede observar que si se juntan los cuatro pedazos amarillos, se forma un cuadrado de lado $(9 - 3) \times (9 - 3) = 6 \times 6 = 36$ cm.



Es fácil concluir entonces que el área total sombreada es $4 \times 81 - 36 = 288$ cm^2.

14) La respuesta es 501. El número $1\,2\,3\,4\ldots\,202\,203$, donde se han escrito los primeros 203 números enteros positivos, es uno donde aparece la cadena de números 2022 y tenemos que el número de dígitos es igual a $9+(90)(2)+(100)(3)+4(3) = 501$. Este número es el más pequeño, pues la cadena 20 aparece antes de considerar el número que usa los primero 200 números, solamente cuando se consideran 20 o 120 números seguidos, así que no es posible que aparezca antes la cadena 2022.

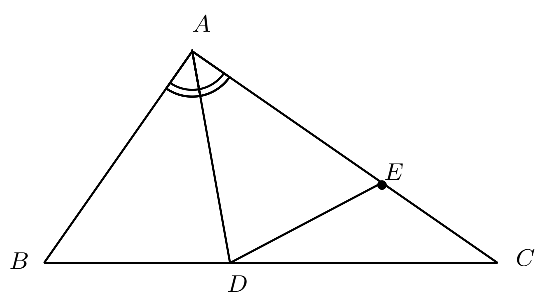
15) La respuesta es 67. Empezamos mostrando un camino que prueba que 67 es posible. Para esto, el gusano empieza en el vértice A de la figura de la izquierda y sigue el camino morado hasta llegar al punto B. De ahí sigue el camino verde hasta llegar al punto C donde, por la línea amarilla, se regresa al punto B y, siguiendo el camino amarillo, sigue hasta llegar al punto E. De nuevo, siguiendo el camino naranja, el gusano regresa al punto D y avanza por el camino naranja hasta el punto F. Después, en la figura de la derecha, del punto F se va al vértice G por el camino naranja para que, usando el camino celeste, se regrese al punto F y siga ese camino celeste hasta llegar al punto I. Finalmente, siguiendo el camino rosa, el gusano regresa al punto H y, siguiendo ese mismo camino, termina su recorrido llegando al vértice J.



Ahora, se probará que se ocupa al menos esa cantidad de días. Primero obsérvese que hay exactamente 60 segmentos en la figura. Además, existen 16 vértices de la cuadrícula que tienen exactamente tres segmentos saliendo de él (los que están sobre los lados del cuadrado más grande que no son las esquinas), llamémoslos *especiales*. Siempre que el gusano llega a un vértice tiene que salir de él (a menos que ese sea el vértice final de su recorrido), por lo que si el gusano no empieza ni termina en un vértice especial en particular, va a repetir al menos un segmento que sale de él pues usará dos la primera vez que pase por él y, como tiene que pasar de nuevo por ahí para cubrir el tercer segmento, repetirá uno cuando salga. Esto no sucede con los vértices que no son especiales pues tienen una cantidad par de segmentos saliendo de ellos.
Así, por cada vértice especial que no es el inicio ni el fin del recorrido, se va a repetir un segmento. Como son 16 vértices especiales y a lo mucho dos pueden ser el inicio o el fin del recorrido, se van a repetir al menos 14 segmentos, pero estos se pueden contar doble (un segmento repetido para un vértice puede ser el mismo segmento repetido para otro vértice), por lo que al menos se deben repetir en total $\frac{14}{2} = 7$ segmentos, dando un total de al menos 67 días para recorrer todos los segmentos de la cuadrícula.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel I

1) Sea E un punto del segmento AC tal que $AE = AB = 6$. Por el criterio LAL, los triángulos ABD y ADE son congruentes, lo cual implica que sus áreas son iguales.



Por otro lado, como los triángulos ADE y DCE tienen la misma altura sobre las bases AE y EC, respectivamente, tenemos que $\frac{(ADE)}{(DCE)} = \frac{6}{3} = 2$. Luego, $(ABD) = (ADE) = 2(DCE) = 6$, por lo que $(ABC) = (ABD) + (ADC) + (DCE) = 8 + 8 + 4 = 20$, donde los paréntesis denotan área.

2) Veamos que Eva gana si usa la siguiente estrategia: Si Ana pone m fichas, Eva debe poner $4 - m$ fichas. De esta manera, en cada turno, al terminar Eva, se habrán puesto un múltiplo de 4 fichas. Como hay 81 casillas, la última ficha la pondrá Ana y entonces Eva gana.

3) Notemos que cada uno de los números 14, 15, 64, 144, 180, 378 es producto de tres dígitos y, sin importar el orden, de una única terna de dígitos:

$$\begin{aligned} 14 &= 1 \cdot 2 \cdot 7, \\ 15 &= 1 \cdot 3 \cdot 5, \\ 64 &= 2 \cdot 4 \cdot 8, \\ 144 &= 3 \cdot 6 \cdot 8, \\ 180 &= 4 \cdot 5 \cdot 9, \\ 378 &= 6 \cdot 7 \cdot 9, \end{aligned}$$

El número del cuadrado de la esquina superior izquierda es el número común de la primera fila y la primera columna, que es 1.
El número del cuadrado de la esquina superior derecha es el número común de la primera fila y la tercera columna, que es 5.
El número del cuadrado de la esquina inferior izquierda es el número común de la tercera fila y la primera columna, que es 7.
El número del cuadrado de la esquina inferior derecha es el número común de la tercera fila y la tercera columna, que es 9.
Por lo tanto, la suma buscada es igual a $1 + 5 + 7 + 9 = 22$.

1		5
7		9

4) Los números primos de dos dígitos tienen como dígito de las unidades a un número impar diferente de 5. Luego, c solamente puede ser alguno de 1 ,3, 7, 9. Los números primos de dos dígitos que terminan en 1 son los siguientes 5 números: 11, 31, 41, 61 71; los que terminan en 3 son $13, 23, 43, 53, 73, 83$ que son 6; los que terminan en 7 son $17, 37, 47, 67, 97$ que son 5 y los que terminan en 9 son $19, 29, 59, 79, 89$ que son 5.
Si $c = 1$, hay cinco primos de la forma $b1$, pero como ab es también primo, b no puede ser 4 o 6. Luego, bc es solamente uno de $11, 31, 71$ y, en cada caso, hay $5, 6, 5$ posibles valores de ab, respectivamente. Luego, en este caso, tenemos 16 números abc.
Si $c = 3$, de nuevo hay seis posibles primos de dos dígitos de la forma $b3$, pero como ab debe ser primo, solamente debemos considerar a 13 y 73. Las posibilidades

para $a1$ son cinco y las posibilidades para $a7$ son cinco, así en este caso, hay 10 números abc.
Si $c = 7$, de los cinco posibles números $b7$ solamente nos fijaremos en 17, 37 y 97, en los otros casos ab no será primo. Primos de la forma $a1$, hay cinco, primos de la forma $a3$ hay seis y primos de la forma $a7$ hay cinco, así en este caso, hay 16 números abc que cumplen la propiedad.
Si $c = 9$, de igual manera solamente serán de interés el 19 y el 79. Para el primero hay cinco primos de la forma $a1$ y para el segundo hay cinco de la forma $a7$, por lo que en este último caso hay 10 números abc de los que se buscan.
Luego, en total hay $16 + 10 + 16 + 10 = 52$ números de tres dígitos abc con ab y bc primos.

Solución alternativa. Los posibles valores de b son $1, 3, 7, 9$. Si $b = 1$, entonces los valores posibles de a son $1, 3, 4, 6, 7$ y los de c son $1, 3, 7, 9$, lo que da $5 \times 4 = 20$ maneras de escoger el número abc. Si $b = 3$, entonces los valores posibles a son $1, 2, 4, 5, 7, 8$ y los de c son $1, 7$, lo que da $6 \times 2 = 12$ números más de la forma abc. Si $b = 7$, entonces los valores posibles a son $1, 3, 4, 6, 9$ y los de c son $1, 3, 9$, lo que da $5 \times 3 = 15$ números más de la forma abc. Ahora si $b = 9$, entonces valores posibles de a son $1, 2, 5, 7, 9$ y el único valor posible de c es 7, lo que da $5 \times 1 = 5$ números más de la forma abc. Luego, en total hay $20 + 12 + 15 + 5 = 52$ números de tres dígitos que cumplen lo requerido.

5) Por las condiciones del problema y el criterio de divisibilidad entre 8, un número de 4 dígitos con todos sus dígitos en orden creciente debe terminar en 248, 256, 456 o 568. Por lo que hay 6 números ocholates de 4 cifras: $1248, 1256, 1456, 2456, 3456$ y 4568. La diferencia entre el mayor y el doble del menor es $4568 - 2(1248) = 2072$.

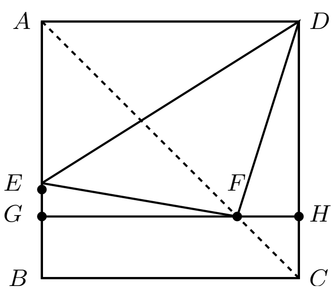
6) Hay 4 triángulos isósceles sobre cada cara de un cubo: 2 por cada diagonal de la cara. Para cada vértice del cubo hay tres caras que lo comparten, entonces usando las diagonales de estas tres caras (las diagonales que no usan el vértice del cubo tomado), se forma un triángulo equilátero (que desde luego es isósceles) y, de estos triángulos, hay 8. Por lo tanto, se forman $(4 \times 6) + 8 = 32$ triángulos isósceles. Luego, de los $\binom{8}{3} = 56$ triángulos que se forman con los vértices del cubo, hay $56 - 32 = 24$ que son escalenos.

Solución alternativa. Si el cubo es de lado 1, las distancias posibles entre vértices del cubo son 1, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. La distancia $\sqrt{3}$ se logra con vértices "opuestos" del cubo o extremos de diagonales mayores, de las que hay 4. Tomemos una de estas diagonales mayores, cada vértice de tal diagonal tiene adyacentes tres aristas del cubo de longitud 1 y, el tercer lado para formar el triángulo, ya quedó determinado y es una diagonal de una cara. Luego, hay $4 \times 3 \times 2 = 24$ triángulos escalenos (el 4 corresponde a las 4 diagonales mayores, el 3 corresponde a los lados adyacentes a un extremo de la diagonal y el 2 corresponde a los dos extremos).

7) Contaremos la cantidad de números que no tienen dígitos iguales a 2 ni a 0. Si el número tiene un dígito, solo hay 8 opciones. Si tiene dos dígitos, hay $8 \times 8 = 64$

números. Si el número tiene tres dígitos, hay $8 \times 8 \times 8 = 512$ y, si tiene cuatro dígitos, hay $1 \times 8 \times 8 \times 8 = 512$ números. En total hay $8 + 64 + 512 + 512 = 1096$ números cuyos dígitos no son ni 2 ni 0, por lo que la cantidad de números que tienen al menos un dígito igual a 2 o 0 es igual a $2020 - 1096 = 924$.

8) Tracemos el segmento GH paralelo a AD y que pase por F, con G y H puntos de los lados AB y CD, respectivamente. Como HF es paralela a DA por el teorema de Tales tenemos que $\frac{DH}{HC} = \frac{AF}{FC} = 4$. Luego, $DH = 4$ cm, $HC = 1$ cm y también $EG = FH = HC = 1$ cm, $GF = 4$ cm. Esto significa que los triángulos rectángulos EGF y FHD son congruentes.



Tenemos entonces que el triángulo DEF es isósceles con $EF = FD = \sqrt{17}$ cm. Además, como $\angle HFD + \angle EFG = 90^\circ$ tenemos que $\angle DFE = 90^\circ$. Luego, el triángulo DEF tiene un ángulo de 90° y dos ángulos iguales de 45°. Por lo tanto, su área es igual a $(DEF) = \frac{\sqrt{17} \times \sqrt{17}}{2} = \frac{17}{2}$ cm^2.

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2021, No. 2

4^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 14 al 19 de octubre de 2020 se llevó a cabo el Concurso Nacional de la 4^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) de manera virtual. Participaron 80 estudiantes de primaria, representando a 27 entidades federativas y, 176 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas. La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

Los ganadores de medalla de oro y medalla de plata en la prueba individual junto con los ganadores de medalla de oro en la prueba por equipos en cada nivel, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán

a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2021 de forma virtual.
A continuación, listamos los nombres de los alumnos que integran la preselección nacional, así como los problemas y soluciones de la prueba individual y por equipos del Nivel II de la 4^a OMMEB.

Nombre	**Estado**	**Medalla**
Mateo Iván Latapí Acosta	Ciudad de México	Oro
Alonso Baeza Quevedo	Baja California Sur	Oro
Galileo López Loreto	Jalisco	Oro
Sebastián Montemayor Trujillo	Nuevo León	Oro
Emiliano Hernández Barranco	Morelos	Oro
Luis Veudi Vivas Pérez	Quintana Roo	Oro
José Ángel Reynaga Álvarez	Jalisco	Plata
Javier Caram Quirós	Ciudad de México	Plata
Woojoong Kwon	Ciudad de México	Plata
Ángel Tadeo Sánchez Sánchez	Hidalgo	Plata
Leonardo Melgar Rubí	Morelos	Plata
Sebastián Gutiérrez Suárez	Sinaloa	Plata
Yérik Damián Flores Torres	Puebla	Plata
Kevin Gibrán Sánchez Martínez	Zacatecas	Plata
Alan Alejandro López Grajales	Chiapas	Plata
Andrea Sarahí Cascante Duarte	Morelos	Plata
Catherine González Díaz	Guerrero	Plata
Mario Alberto Valdez Soto	Sinaloa	Plata

En la prueba por equipos en el Nivel II, el Estado de Baja California Sur obtuvo el primer lugar (con 254 puntos), la Ciudad de México obtuvo el segundo lugar (con 230 puntos) y el Estado de Morelos obtuvo el tercer lugar (con 212 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel II fueron:
Primer lugar: Ciudad de México (con 436 puntos). Segundo lugar: Baja California Sur y Jalisco (con 396 puntos). Tercer lugar: Morelos (con 385 puntos).

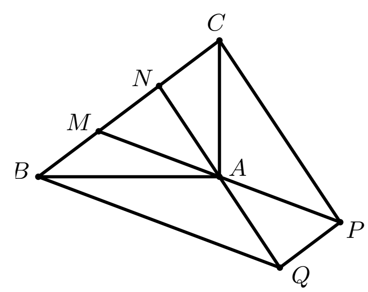
Prueba Individual, Nivel II

Parte A

1) Juan nació después del año 1970 pero antes del año 2000. Si en el año n^2 Juan cumple n años, ¿cuántos años cumple Juan en el año 2020?

2) Un píxel está formado por 3 leds: uno rojo, uno verde y uno azul, donde cada uno puede prender con 4 intensidades de luminosidad diferentes (además de que pueden estar apagados). Cada configuración de estos tres leds determina el color del píxel. ¿Cuántas configuraciones hay con el led azul prendido?

3) Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle BAC = 90°$ y área 12 cm^2. Sean M y N puntos en la hipotenusa BC tales que $BM = MN = NC$. Se prolongan los segmentos MA y NA más allá de A, hasta los puntos P y Q tales que $MA = AP$ y $NA = AQ$. Encontrar el valor del área del cuadrilátero $BCPQ$ en cm^2.

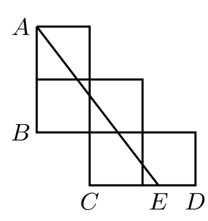


4) Una máquina A es capaz de cortar una determinada área de césped en 120 minutos. Una máquina B corta esa misma área en 240 minutos. Si se ponen a trabajar las dos máquinas al mismo tiempo para cortar esa área, ¿en cuántos minutos estará cortado el césped?

5) En cada casilla de una cuadrícula de 3×3 hay una moneda. ¿De cuántas maneras se pueden quitar dos monedas que no se encuentren en casillas que comparten un lado?

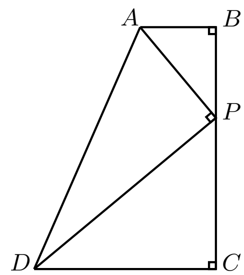
6) Cada número de 3 cifras decimales se divide entre la suma de sus 3 cifras y da un resultado. Por ejemplo, el número 207 se divide entre $2 + 0 + 7 = 9$ y el resultado es $\frac{207}{9} = 23$. ¿Cuál es el mayor valor que se puede obtener como resultado, al considerar todos los números de tres cifras?

7) La siguiente figura está formada por 5 cuadrados iguales de área 36 cm^2 cada uno. Los puntos A, B, C y D son vértices de cuadrados. El punto E del segmento CD es tal que el segmento AE divide a los 5 cuadrados en dos partes de la misma área. Determinar la medida, en cm, del segmento CE.



8) ¿Cuántos números de la lista $1, 2, 3, \dots, 2019, 2020$ tienen al menos un dígito igual a 2 o igual a 0?

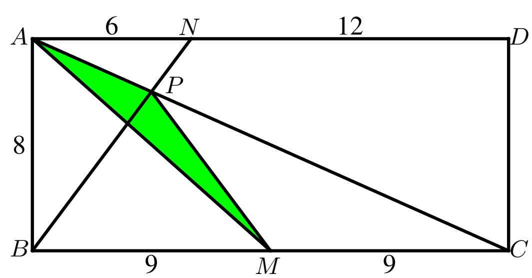
9) En la siguiente figura se tiene $AB = 5$ cm, $BC = 16$ cm y $DC = 12$ cm. Si $BP < PC$, ¿cuánto mide, en cm^2, el área del triángulo APD?



10) Se consideran todos los enteros positivos que se construyen escribiendo consecutivamente los primeros números enteros positivos. Por ejemplo, el que aparece en el primer lugar es el 1, en segundo lugar aparece 12, en el lugar 3 aparece 123, y así sucesivamente (en el lugar 12 aparece 123456789101112). De los números anteriores, ¿cuántos dígitos tiene el número más pequeño en el que aparece la cadena 2022? Por ejemplo, el número de dígitos del número más pequeño en el que aparece la cadena 91 es 11 pues aparece por primera vez en el décimo número 12345678**91**0, el cual tiene 11 dígitos.

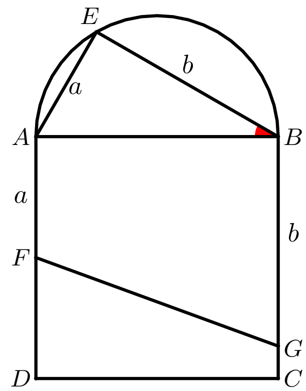
11) ¿Cuántos subconjuntos de 3 elementos (distintos) del conjunto $X = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ cumplen que el producto de los 3 números del subconjunto es divisible entre 4? Nota: Los subconjuntos $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$ y $\{2, 3, 1\}$ se consideran iguales.

12) En la figura se muestra un rectángulo $ABCD$ con $AB = 8$ cm y $BC = 18$ cm; M es el punto medio de BC, N es el punto del segmento AD tal que $AN = 6$ cm y P es el punto de intersección de AC con BN. Determinar el área, en cm^2, del triángulo APM.



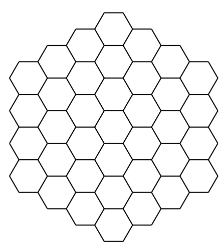
Parte B

13) Sea $ABCD$ un cuadrado. Se dibuja, por fuera del cuadrado, un semicírculo que tenga al lado AB como diámetro. Se escoge un punto E en la semicircunferencia. Sean G y F puntos de los segmentos BC y AD, respectivamente, tales que $GB = BE$ y $AF = AE$. Sean $a = AF$ y $b = GB$. Si las áreas entre $ABGF$ y $FGCD$ están a razón $\frac{a+b}{3a-b}$, ¿cuánto mide el ángulo $\angle EBA$?



14) Sea $x_0 = a$ con a un número entero positivo. Para cada entero $n > 0$ definimos $x_n = 5x_{n-1} + 1$. ¿Cuántos valores de a menores o iguales que 2020 satisfacen que x_k no es divisible entre 9 para todo entero $k \geq 0$?

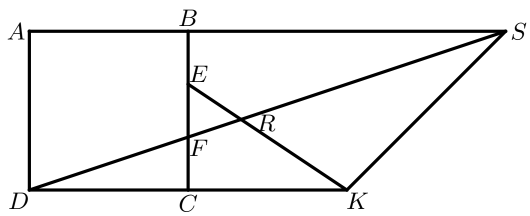
15) En la figura de abajo se muestra un panal de abejas. Dos hexágonos son vecinos si comparten una arista. Si en cada hexágono cabe a lo más una abeja, ¿cuál es la mayor cantidad de abejas que pueden vivir en dicho panal de modo que no haya abejas vecinas?



Prueba por Equipos, Nivel II

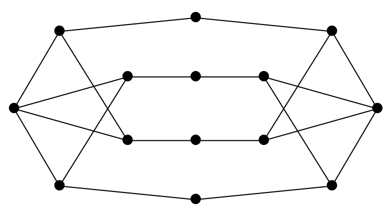
1) Determinar la cantidad de números enteros que son múltiplos de 3 y tienen 5 dígitos distintos escogidos dentro de la lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, pero dos de sus dígitos son 1 y 2, en ese orden. Por ejemplo, 31725 y 31254 son números de los que queremos, mientras que 32715 y 31724 no.

2) En la figura se muestra un cuadrado $ABCD$ de área 36 cm^2. Los puntos E y F sobre BC son tales que $BE = EF = FC$; el punto K sobre la recta CD es tal que C es el punto medio del segmento DK. La recta DF intersecta a las rectas EK y AB en R y S, respectivamente. Determinar el área, en cm^2, del triángulo KRS.

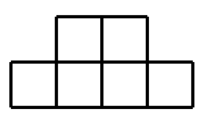


3) ¿Cuántos números de tres dígitos, abc (con $a \neq 0$), tienen la propiedad de que los números de dos dígitos ab y bc son números primos? Por ejemplo, un número que cumple es 237 pues tanto 23 como 37 son números primos.

4) La siguiente figura consta de 14 vértices y 20 segmentos. Se dice que dos vértices son vecinos si hay una línea que empieza en uno de ellos y acaba en otro. Raúl quiere elegir algunos vértices de manera que entre los vértices que eligió y sus vecinos, estén elegidos todos los vértices. ¿Cuál es la mínima cantidad de vértices que debe elegir Raúl para lograr esto?

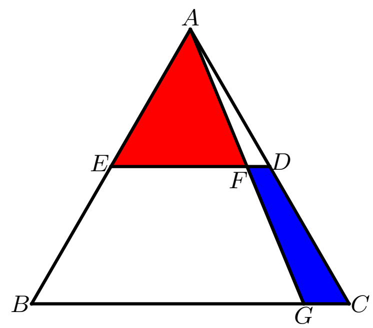


5) Una ficha sombrero es una como la que se muestra en la figura, donde cada cuadrito es de 1×1. Se quiere cubrir una cuadrícula de 6×40 con fichas sombrero, de tal manera que las fichas no se traslapen, no se salgan del tablero y los lados de las fichas sean paralelos a los lados de la cuadrícula. ¿De cuántas formas distintas puede llenarse el tablero, considerando que las fichas pueden rotarse?



6) Encontrar la suma de todos los números enteros n de tres dígitos distintos, para los cuales la suma de todos los números de dos dígitos que se pueden formar con los dígitos de n sea igual al doble de n. Por ejemplo, si $n = 123$, entonces los números de dos dígitos distintos que se pueden formar con los dígitos de n son 12, 13, 21, 23, 31 y 32.

7) En la figura, ABC es un triángulo equilátero cuyos lados miden 28 cm. Los puntos medios de AB y AC son E y D, respectivamente. ¿Cuál debe ser el valor de la longitud del segmento BG, en cm, para que el área del triángulo AEF sea igual al doble del área del cuadrilátero $CDFG$?



8) En un país, se tienen ciudades que inician con cada letra del abecedario (el cual cuenta con 26 letras). Hay una ciudad cuyo nombre empieza con la letra a, dos ciudades cuyos nombres empiezan con la letra b, tres ciudades con la letra c, cuatro ciudades con d y así sucesivamente. Solo se puede pasar de una ciudad a otra si las letras con las que empieza su nombre son vecinas en el abecedario; por ejemplo, c es vecino de b y d, así como a es vecino de b y z. ¿Se pueden recorrer todas las ciudades sin repetir?

Soluciones de la Prueba Individual, Nivel II

Parte A

1) Como Juan nació antes del año 2000, su año de nacimiento es el año actual n^2 menos la edad que tiene n. Así, $1970 < n^2 - n < 2000$. Puesto que $44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$ y $46^2 = 2116$, entonces Juan no puede cumplir 46 años en el año 46^2 ni puede cumplir 44 años en el año 44^2, así que debe cumplir 45 años en el año 2025, de modo que nació en 1980 y en el año 2020 cumplió 40 años.

2) Las posibilidades de que el led azul esté prendido son 4. Cada uno del led rojo y el azul tienen 5 posibilidades. Entonces, el resultado es $4 \times 5 \times 5 = 100$.

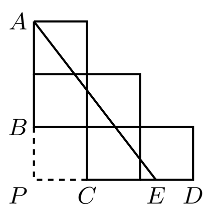
3) Como M y N dividen al segmento BC en tres partes iguales, las áreas de de los triángulos ACN, NAC y MAB son todas iguales a $\frac{12}{3} = 4$ cm^2. También tenemos que los triángulos NAM y QAP son congruentes y así el área del triángulo QAP es igual a 4 cm^2. Por otro lado, los triángulos BAQ y BAN tienen la misma altura desde B y la misma base pues $NA = AQ$, así que el área del triángulo ABQ es igual a 8 cm^2. El mismo razonamiento aplica para determinar que el área del triángulo CAP es igual a 8 cm^2. Entonces, el área total es $8+8+4+4+4+4 = 32$ cm^2.

4) En una hora, A poda la mitad del césped y B poda la cuarta parte, de manera que entre las dos podan $\frac{3}{4}$ partes del área total. Necesitan podar una cuarta parte más, es decir, un tercio de lo que podan en una hora. Como $\frac{60}{3} = 20$, la cantidad total de minutos es $60 + 20 = 80$.

5) Como hay 9 monedas, entonces hay $\binom{9}{2} = \frac{9\times 8}{2} = 36$ maneras de quitar dos monedas. Ahora, falta contar la cantidad de maneras en que se pueden quitar dos monedas que comparten un lado, lo cual es equivalente a contar cuántas aristas tiene una cuadrícula de 3×3 sin contar las del exterior. Es fácil ver que hay 12 de estas aristas, por lo que en total hay $36 - 12 = 24$ maneras de quitar dos monedas que no se encuentren en casillas que comparten un lado.

6) Notamos primero que el cociente entre dos números es más grande cuando el numerador es lo máximo posible y el denominador es lo mínimo posible. Si la suma de cifras es cualquier número entero entre 1 y 9, lo máximo que puede ser el cociente es 100 pues, por ejemplo, si la suma fuera 7, el mayor numerador que puede tener suma de dígitos igual a 7 es 700 y entonces $\frac{700}{7} = 100$. Si la suma de los dígitos es 10 o más, como el numerador a lo más es 999, entonces el cociente es menor o igual a $\frac{999}{10} = 99.9$. Por lo tanto, la respuesta es 100.

7) El área de los 5 cuadrados es $36 \times 5 = 180$ cm^2, así que buscamos que AE parta la figura en dos regiones de área 90 cm^2 cada una. Completemos la figura con un cuadrado como se muestra en la figura.



Como cada cuadrado mide 6 cm de lado, se tiene que $AP = 18$ cm y $PE = 6+CE$ cm. De esta manera, obtenemos que $\frac{18(6+CE)}{2} = 90 + 36 = 126$ cm, de donde $18(6 + CE) = 252$ cm y entonces $CE = \frac{252}{18} - 6 = 14 - 6 = 8$ cm.

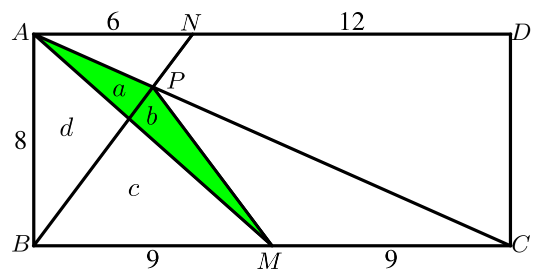
8) Contemos la cantidad de números en la lista que no tienen ningún dígito igual a 0 o a 2. Hay 8 opciones en las que el número tiene un dígito; hay $8 \times 8 = 64$ en las que el número tiene 2 dígitos; hay $8\times 8\times 8 = 512$ con 3 dígitos y hay $1\times 8\times 8\times 8 = 512$ con 4 dígitos. En total, hay $8 + 64 + 512 + 512 = 1096$ números cuyos dígitos no son ni 2 ni 0, por lo que la cantidad de números que tienen al menos un dígito igual a 2 o igual a 0 es $2020 - 1096 = 924$.

9) Notemos que los triángulos ABP y PCD son semejantes, por lo que $\frac{AB}{BP} = \frac{PC}{CD}$, esto es, $\frac{5}{BP} = \frac{16-BP}{12}$. Como $BP < PC$, necesariamente $BP = 6$ cm y $PC = 16 - BP = 10$ cm. Por el teorema de Pitágoras, tenemos que $AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{61}$ cm y $PD = \sqrt{CD^2 + PC^2} = 2\sqrt{61}$ cm. Por lo tanto, el área del triángulo APD es igual a $\frac{AP\times PD}{2} = 61$ cm^2.

10) El número 20 solamente aparece antes del 200 en 20 y en 120 y ahí no aparece 2022. Entonces, la secuencia 2022 aparece por primera vez en el lugar 203: $123\ldots 202203$. Contemos los dígitos usados: Del 1 al 9 hay 9 dígitos; del 10 al 99 hay $2 \times 90 = 180$ dígitos, del 100 al 199 hay $3 \times 100 = 300$ dígitos y, finalmente, del 200 al 203 hay $3 \times 4 = 12$ dígitos. El total es $9 + 180 + 300 + 12 = 501$.

11) Hay $\binom{20}{3} = \frac{20\times19\times18}{3\times2\times1} = 1140$ subconjuntos de 3 elementos de X. Para que un subconjunto de 3 elementos no cumpla con la condición puesta, es porque o bien los tres números deben son impares o bien porque hay dos impares y uno par no múltiplo de 4. En el primer caso hay $\binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$ subconjuntos; en el segundo hay $5\binom{10}{2} = \frac{5\times10\times9}{2} = 225$ subconjuntos. Por lo tanto, la respuesta es $1140 - 120 - 225 = 795$.

12) Sean h y H las respectivas alturas de los triángulos APN y CPB desde P. Como estos triángulos son semejantes en razón $1 : 3$, tenemos que $3h = H$; además $H + h = 8$, de donde $h = 2$ cm y $H = 6$ cm.
Ahora, sean a, b, c y d las áreas que se indican en la siguiente figura.



Notemos que $a + b = (a + d) - (d + c) + (c + b)$. Pero $a + d = \frac{6\times8}{2} - \frac{6\times2}{2} = 18$ cm^2, $d + c = \frac{9\times8}{2} = 36$ cm^2 y $c + b = \frac{9\times6}{2} = 27$ cm^2. Por lo tanto, $a + b = 18 - 36 + 27 = 9$ cm^2.

Parte B

13) Por el teorema de Pitágoras, tenemos que $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$. Luego, $[ABGF] = \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ y, por lo tanto, $[FGCD] = [ABCD] - [ABGF] = a^2 + b^2 - \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Se sigue entonces que

$$\frac{a+b}{3a-b} = \frac{[ABGF]}{[FGCD]} = \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{2\left(a^2+b^2\right) - (a+b)\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Esta última ecuación implica que

$$2\left(a^2 + b^2\right) - (a+b)\sqrt{a^2+b^2} = (3a-b)\sqrt{a^2+b^2},$$

esto es, $2\left(a^2 + b^2\right) = 4a\sqrt{a^2+b^2}$ y, por consiguiente, $b = \sqrt{3}a$. Esto significa que el triángulo AEB es la mitad de un triángulo equilátero. Por lo tanto, $\angle EBA = 30°$.

14) Tomemos $a \equiv 0 \pmod 9$. Entonces podemos formar la siguiente lista módulo 9:

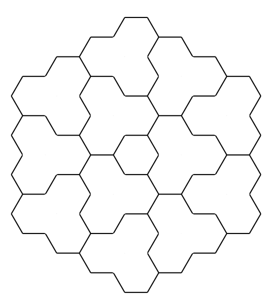
$$\begin{aligned}
x_0 &\equiv 0,\\
x_1 &\equiv 5(0) + 1 = 1,\\
x_2 &\equiv 5(1) + 1 = 6,\\
x_3 &\equiv 5(6) + 1 \equiv 4,\\
x_4 &\equiv 5(4) + 1 \equiv 3,\\
x_5 &\equiv 5(3) + 1 \equiv 7,\\
x_6 &\equiv 5(7) + 1 \equiv 0.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Por esta razón, si $a \equiv 0, 1, 3, 4, 6, 7 \pmod 9$, entonces este ciclo se repite y llegamos a algún $x_k \equiv 0 \pmod 9$, dejando fuera del ciclo las congruencias 2, 5 y 8.

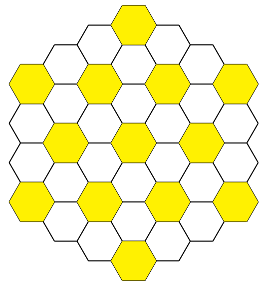
- Si $x_i \equiv 2 \pmod 9$ entonces $x_{i+1} \equiv 5(2) + 1 \equiv 2 \pmod 9$.
- Si $x_i \equiv 5 \pmod 9$ entonces $x_{i+1} \equiv 5(5) + 1 \equiv 8 \pmod 9$.
- si $x_i \equiv 8 \pmod 9$ entonces $x_{i+1} \equiv 5(8) + 1 \equiv 5 \pmod 9$.

Así, cualquier a con estas congruencias módulo 9 cumple las condiciones del problema. Nótese que esto equivale a que $a \equiv 2 \pmod 3$. Por lo tanto, hay 673 números menores o iguales que 2020 que cumplen.

15) En la siguiente partición de los hexágonos, a lo más un hexágono de cada parte puede estar coloreado, lo que demuestra que no pueden vivir más de 13 abejas en el panal.



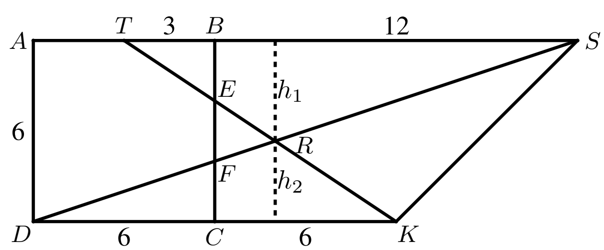
Con la siguiente elección nos podemos dar cuenta que sí pueden vivir 13 abejas en el panal.



Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel II

1) Tenemos $\binom{5}{2} = 10$ formas de escoger las posiciones donde pondremos al dígito 1 y al dígito 2. Por el criterio de divisibilidad del 3, para que el número resultante sea múltiplo de 3, la suma de sus dígitos en las tres posiciones restantes debe ser múltiplo de 3 ya que 1 y 2 suman 3. Ahora encontraremos las ternas de números distintos a, b, c en el conjunto $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ tales que $a + b + c$ es múltiplo de 3. Observemos que la única manera de lograr ternas de números distintos que sumen un múltiplo de 3, es escogiendo un dígito entre 3 y 6, uno entre 4 y 7 y escogiendo el dígito 5. Luego, las ternas posibles son $\{3, 4, 5\}$, $\{3, 7, 5\}$, $\{6, 4, 5\}$ y $\{6, 7, 5\}$. Si $N = abc$ es el número de tres dígitos que se forma con las tres posiciones restantes después de colocar al 1 y al 2, entonces por cada una de las ternas anteriores, obtenemos 6 valores de N, lo que hace un total de 24 valores posibles de N. Por lo tanto, en total hay $10 \times 24 = 240$ números que satisfacen las condiciones del problema.

2) Notemos que los triángulos BFS y CFD son semejantes en razón 2 : 1, pues BS es paralela a CD y $BF = 2FC$, por lo que $BS = 12$ cm. Sea T la intersección de EK con AB. Análogamente, los triángulos TBE y KCE son semejantes en razón 1 : 2, lo que implica que $BT = 3$ cm.

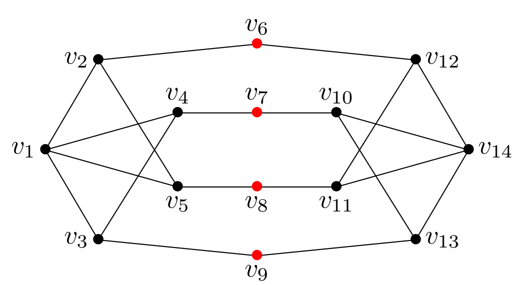


Ahora, observemos que los triángulos TRS y KRD son semejantes por ser TS y DK paralelas y $\angle DRK = \angle SRT$. De aquí, si h_1 y h_2 son las alturas desde R hasta AB y CD, respectivamente, entonces $\frac{h_1}{h_2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$, así que $5h_2 = 4h_1$ y, como $h_1 + h_2 = 6$, se sigue que $h_2 = \frac{8}{3}$ cm, por lo que $[DRK] = \left(\frac{8}{3} \times \frac{12}{2}\right) = 16$ cm^2. También, $[DKS] = \frac{12\times 6}{2} = 36$ cm^2, lo cual implica que

$$[KRS] = [DKS] - [DRK] = 36 - 16 = 20 \text{ cm}^2.$$

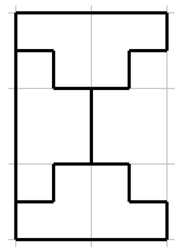
3) Los números primos de dos dígitos tienen como dígito de las unidades a un número impar distinto de 5. Luego, c solamente puede ser alguno de $1, 3, 7$ o 9. Hay 5 números primos de dos dígitos que terminan en 1: $11,\ 31,\ 41,\ 61,\ 71$; hay 6 números primos de dos dígitos que terminan en 3: $13, 23, 43, 53, 73, 83$; hay 5 números primos de dos dígitos que terminan en 7: $17, 37, 47, 67, 97$ y, hay 5 números primos de dos dígitos que terminan en 9: $19, 29, 59, 79, 89$. Veamos las distintas posibilidades de c.
   Caso $c = 1$. Hay cinco primos de la forma $b1$, pero como ab es también primo, b no puede ser 4 o 6. Luego, bc es solamente uno de $11, 31, 71$; de donde el número de posibilidades para ab es $5 + 6 + 5 = 16$.
   Caso $c = 3$. De nuevo hay seis posibles primos de dos dígitos de la forma $b3$, pero como ab debe ser primo, solamente debemos de considerar a 13 y 73. Las posibilidades para $a1$ son cinco y para las de $a7$ son cinco. Entonces, aquí tenemos 10 números abc.
   Caso $c = 7$. De los cinco posibles números $b7$, solamente nos fijaremos en 17, en 37 y en 97; en los otros ab no será primo. Hay 5 primos de la forma $a1$; hay 6 primos de la forma $a3$ y hay 5 primos de la forma $a7$. Así, en este caso tenemos 16 números abc.
   Caso $c = 9$. De igual manera solamente son de interés el 19 y el 79. Para el primero hay cinco primos de la forma $a1$ y hay cinco de la forma $a7$, por lo que en este último caso hay 10 números abc.
   Luego, en total hay $16 + 10 + 16 + 10 = 52$ números de tres dígitos abc con ab y bc números primos.

4) Primero vamos a etiquetar los vértices:

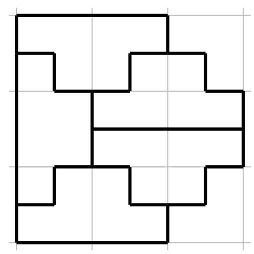


   Notemos que Raúl debe elegir al menos 4 vértices de la figura ya que los vértices en rojo no son vecinos y tampoco tienen vecinos en común. Luego, eligiendo v_2, v_4, v_{11} y v_{13}, Raúl logra su cometido. Entonces, debe elegir 4 vértices.

5) Notemos que para que las esquinas puedan llenarse, las primeras tres fichas deben colocarse como se muestra.



Después de eso hay dos opciones: colocar una ficha para completar un rectángulo o colocar dos fichas extra como se ve en la siguiente figura



en cuyo caso volveremos a una situación como la que se tenía. Esto muestra que cada múltiplo de 4 tenemos dos opciones para continuar el llenado del tablero, y esto será así hasta que lleguemos al final del tablero. De esta manera, en total habrá $\frac{40}{4} - 1 = 9$ momentos en los que se puede elegir, por lo que en total hay $2^9 = 512$ formas de llenar el tablero.

6) Podemos escribir el número n como $n = 100a + 10b + c$ con $0 \leq a, b, c \leq 9$ y $a \neq 0$. Cada número formado con dos dígitos de n se puede escribir como $10x + y$ con $x \in \{a, b, c\}$, $y \in \{a, b, c\}$ y $x \neq y$. Entonces, la condición del problema es equivalente a

$$\begin{aligned} 2n &= 2(100a + 10b + c) \\ &= (10a + b) + (10a + c) + (10b + a) + (10b + c) + (10c + a) + (10c + b). \end{aligned}$$

Así, tenemos que $200a + 20b + 2c = 22a + 22b + 22c$, lo cual implica que $178a = 2b + 20c$ o bien $89a = b + 10c$.
Como $89 < 99$, necesariamente $a \leq 1$, lo cual implica que $a = 1$ y, por lo tanto, $b = 9$ y $c = 8$. Luego, $n = 198$ es el único número que satisface las condiciones.

7) Denotamos el área de XYZ por $[XYZ]$. Como D y E son puntos medios de AC y AB, respectivamente, tenemos que $[ADE] = \frac{1}{4}[ABC]$ y $\frac{FE}{DE} = \frac{GB}{CB}$. Luego $[AFE] = \frac{FE}{DE} \times \frac{1}{4}[ABC] = \frac{GB}{4CB}[ABC] = \frac{GB}{112}[ABC]$.
Por otra parte, sabemos que $[BEFG] = 3[AFE] = \frac{3GB}{112}[ABC]$ y $[BEDC] = \frac{3}{4}[ABC]$, por lo que $[GFDC] = [BEDC] - [BEFG] = \frac{84-3GB}{112}[ABC]$. Como $[AFE] = 2[GFDC]$, se sigue que $\frac{GB}{112}[ABC] = \frac{2(84-3GB)}{112}[ABC]$, es decir, $GB = 168 - 6GB$. Por lo tanto, $GB = 24$ cm.

Solución alternativa. Con la notación de la solución anterior. Si $x = FD$, por la semejanza de los triángulos AFD y AGC, tenemos que $GC = 2x$. Si h es la altura del triángulo AEF, entonces h también es la altura sobre las bases del trapecio $CDFG$. Ahora, $[AFE] = \frac{(14-x)h}{2}$ y $[CDFG] = \frac{(x+2x)h}{2}$; si estas dos áreas cumplen que la primera es el doble de la segunda, entonces $14 - x = 6x$, de donde $x = 2$, luego $BG = 28 - 2(2) = 24$ cm.

8) Demostraremos que no existe tal recorrido. Consideremos la siguiente coloración de las ciudades: Si una ciudad empieza con la i-ésima letra del abecedario e i es par, entonces se colorea de rojo; en caso contrario, se colorea de azul. Observemos que, si se puede pasar de una ciudad a otra, entonces estas deben ser de colores distintos. Si existiera un recorrido que pasa por todas las ciudades sin repetir, por la observación anterior tendríamos que la cantidad de ciudades azules y la cantidad de ciudades rojas diferirían por 1 a lo mucho. Sin embargo, hay $1 + 3 + 5 + \cdots + 25 = 169$ ciudades azules y $2 + 4 + 6 + \cdots + 26 = 182$ ciudades rojas. Como $182 - 169 > 1$, concluimos que tal recorrido no puede existir.

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2021, No. 3

Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica de la Ciudad de México

En la Ciudad de México, se realiza el Concurso de Primaria y Secundaria cada ciclo escolar. Las inscripciones se abren en julio y la primera, segunda y tercera etapa se llevan a cabo en septiembre, octubre y diciembre, respectivamente. En la primera etapa participan alrededor de 25000 niños y niñas de la CDMX. Para la segunda etapa se selecciona al 5 % de cada escuela, de manera que todas las escuelas inscritas tienen alumnos participando. Para la tercera etapa se invita alrededor de 400 participantes. Entre la tercera y cuarta etapa, hay alrededor de seis entrenamientos para prepararlos, por lo que en la tercera etapa se seleccionan alrededor de 100 participantes. Los ganadores de la cuarta etapa conforman la preselección y asisten al Concurso Regional de Educación Básica Zona Centro, que usualmente se celebra en el mes de abril. Los exámenes selectivos constan de 4 exámenes individuales y 4 exámenes por equipos, tratando de simular el formato del Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB).
A continuación presentamos los problemas de la prueba individual del nivel I de la tercera etapa de la OMMEB de la Ciudad de México, la cual se llevó a cabo el día 7 de marzo de 2021. Con este examen fueron seleccionados 32 estudiantes de cuarto grado de primaria y 33 estudiantes de quinto grado de primaria.

Prueba Individual, Nivel I, Tercera Etapa

Ciudad de México, 7 de marzo de 2021

1) En un tablero de ajedrez, dos reyes se atacan si están en dos casillas que comparten un lado o se tocan en una esquina. ¿cuál es el mayor número de reyes que podemos colocar sin que se amenacen?

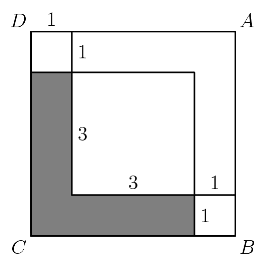
2) El frutero de mi barrio apila las naranjas de la siguiente forma: Sobre una base rectangular de 5×8 naranjas va colocando naranjas de manera que las naranjas del piso superior se apoyan en el hueco que queda entre las cuatro naranjas de abajo hasta coronar con un piso que tiene una única fila de naranjas. ¿Cuántas naranjas tienen las pirámides del frutero?

3) El año 2013 tiene dígitos cuyos valores son cuatro enteros consecutivos. ¿En qué año fue la última vez (antes del 2013) que los dígitos de un año fueron cuatro enteros consecutivos?

4) Algunos caballos y algunos jinetes están en un establo. En total hay 71 cabezas y 228 piernas. ¿Cuántos jinetes hay en el establo?

5) Soy un número de dos dígitos. Al sumarme uno se obtiene un múltiplo de 8 y al sumarme tres se obtiene un múltiplo de 7. ¿Cuál es el número más pequeño que puedo ser?

6) La figura $ABCD$ es un cuadrado. Dentro de este cuadrado se dibujan tres cuadrados más pequeños: dos de lado 1 y uno de lado 3, como se muestra en la figura. ¿Cuánto vale el área sombreada?



7) ¿Cuántos números de exactamente 3 dígitos en su representación decimal no tienen ninguno de sus dígitos igual a 1?

8) Se tienen 2019 ciudades y se quieren construir carreteras de manera que sea posible llegar de una de ellas a cualquier otra. ¿Cuál es el mínimo número de carreteras que se deben construir?

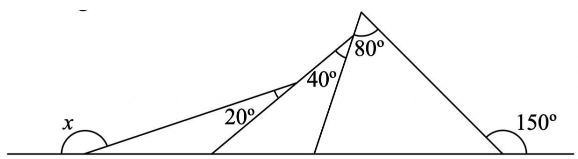
9) Una maestra reparte cantidades iguales de chocolates entre sus 5 alumnos y se queda 3 para ella. No se acuerda cuántos chocolates eran, pero recuerda que era una cantidad múltiplo de 6 entre 65 y 100. ¿Cuántos chocolates tenía antes de hacer la repartición?

10) ¿Cuál es el resultado de

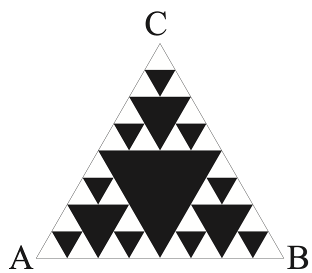
$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots - 2018 + 2019 - 2020 + 2021?$$

11) Si en un cubo de 20 centímetros de lado he logrado meter 7 kilos de arroz sin dejar ni un solo hueco, ¿cuántos kilos de arroz cabrán en un cubo con lados del doble de longitud?

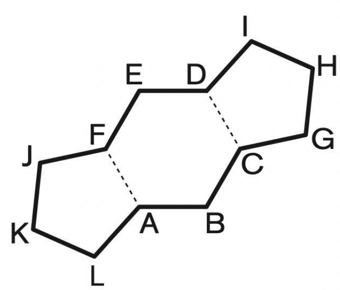
12) ¿Cuánto vale el ángulo marcado con una x?



13) En el triángulo equilátero ABC que se muestra, cada triángulo negro que apunta hacia abajo tiene sus vértices en los puntos medios de los lados de un triángulo blanco que apunta hacia arriba. Si el área del triángulo ABC es 128 cm^2, ¿cuánto vale en total el área blanca?



14) En la figura dos pentágonos regulares han sido pegados a un hexágono regular para crear un polígono de 12 lados. Si cada lado del hexágono mide 3 cm, ¿cuál es el perímetro de la figura resultante?



15) Spike, Butch y Lucky son 3 perros muy hábiles para cavar agujeros. Spike puede cavar 7 agujeros en 3 horas, Butch puede cavar 8 agujeros en 4 horas y Lucky puede cabar 10 agujeros en 5 horas. Si trabajan juntos, ¿cuántos agujeros podrán cavar en 3 horas?

4ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 14 al 19 de octubre de 2020 se llevó a cabo el Concurso Nacional de la 4^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) de manera virtual. Participaron 80 estudiantes de primaria, representando a 27 entidades federativas y, 176 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas. La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

Los ganadores de medalla de oro y medalla de plata en la prueba individual junto con los ganadores de medalla de oro en la prueba por equipos en cada nivel, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán

a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2021 de forma virtual.
A continuación, listamos los nombres de los alumnos que integran la preselección nacional, así como los problemas y soluciones de la prueba individual y por equipos del Nivel III de la 4^a OMMEB.

Nombre	**Estado**	**Medalla**
Franco Giosef Álvarez González	Chiapas	Oro
Rosa Victoria Cantú Rodríguez	Ciudad de México	Oro
Ana Camila Cuevas González	Tamaulipas	Oro
Luis Enrique López Hernández	Hidalgo	Oro
Angel Eduardo Hernández Nuñez	Veracruz	Oro
Alejandra Muñoz Espin	Morelos	Oro
Constanza Huerta Carvajal	Ciudad de México	Oro
Javier Mena Chávez	Zacatecas	Plata
Fernando Álvarez Ruiz	Nuevo León	Plata
Sergio Barragán Arroyo	Oaxaca	Plata
Daniel Ramírez Kün	San Luis Potosí	Plata
Isaac Montaño Manríquez	Baja California Sur	Plata
María Fernanda Tinajero Sánchez	Tamaulipas	Plata
María Fernanda López Tuyub	Yucatán	Plata
Miguel Esteban Martínez Villegas	Jalisco	Plata
Valentina Yhelenna Oviedo Valle	Morelos	Plata
Fernando González Ruiz	Jalisco	Plata
Bastian Alejandro López Vásquez	Oaxaca	Plata
Natalia Laso Moltó	Ciudad de México	Plata

En la prueba por equipos en el Nivel III, la Ciudad de México obtuvo el primer lugar (con 170 puntos), el Estado de Chiapas obtuvo el segundo lugar (con 140 puntos) y los Estados de Baja California Sur, Zacatecas, Nuevo León, Aguascalientes y Yucatán obtuvieron el tercer lugar (con 135 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel III fueron:
Primer lugar: Ciudad de México (con 271 puntos). Segundo lugar: Zacatecas (con 227 puntos). Tercer lugar: Chiapas (con 222 puntos).

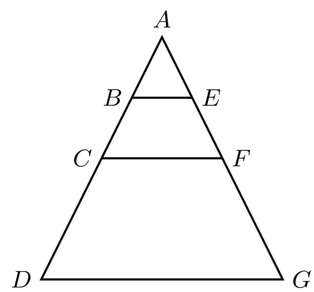
Prueba Individual, Nivel III

Parte A

1) En cada casilla de una cuadrícula de 3×3 hay una moneda. ¿De cuántas maneras se pueden quitar dos monedas que no se encuentren en casillas que comparten un lado?

2) Sean a, b y c enteros positivos diferentes tales que su suma y su producto son cuadrados perfectos. Determina el menor valor posible de $abc(a+b+c)$.

3) En la siguiente figura se sabe que la altura del triángulo ABE es la mitad de la altura del triángulo ACF, y a su vez la altura del triángulo ACF es la mitad de la altura del triángulo ADG. Si el perímetro del triángulo ABE es 7 cm y el perímetro del trapecio $CDGF$ es 22 cm, ¿cuál es el perímetro, en centímetros, del trapecio $BDGE$?



4) ¿Cuántos subconjuntos de tres elementos (distintos) se pueden escoger del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$ de manera que el producto de los tres números no sea divisible entre 4?

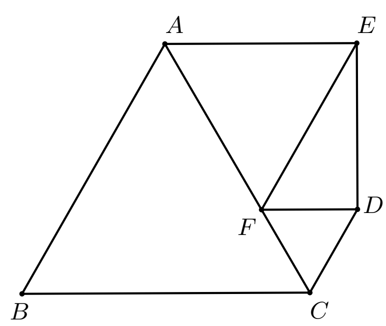
5) La lista $1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 200$ es la sucesión más larga de enteros positivos tal que cada término a partir del tercero es la suma de los anteriores, es decir,

$$x_3 = 1 + x_2,\ x_4 = 1 + x_2 + x_3,\ x_5 = 1 + x_2 + x_3 + x_4$$

y así sucesivamente. Determina el valor de x_2.

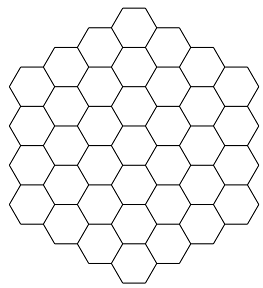
6) Los números reales distintos a, b, c, d satisfacen que $a + c = b + d$ y $a + b + cd = c + d + ab$. Determina la suma de los posibles valores de $a + c$.

7) Sean ABC, AFE y CDF triángulos equiláteros como se muestra en la figura cuyas medidas de sus lados son 6 cm, 4 cm y 2 cm, respectivamente. Si el área del pentágono $ABCDE$ es x cm^2, encuentra el valor de x^2.



8) En la figura de abajo se muestra un panal de abejas. Dos hexágonos son vecinos si comparten una arista. Si en cada hexágono cabe a lo más una abeja, ¿cuál es la

mayor cantidad de abejas que pueden vivir en dicho panal de modo que no haya abejas vecinas?



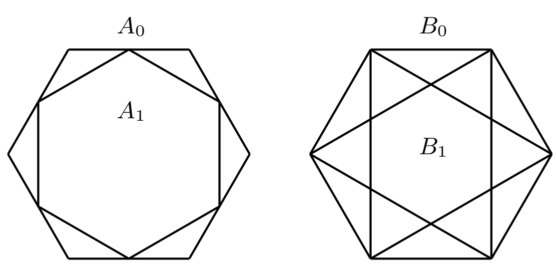
9) Sea $x_0 = a$ con a un número entero positivo. Para cada entero $n > 0$ definimos $x_n = 5x_{n-1} + 1$. ¿Cuántos valores de a menores o iguales que 2020 satisfacen que x_k no es divisible entre 9 para todo entero $k \geq 0$?

10) Sea $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Si el producto

$$\left(1 - \frac{2}{f(1)}\right)\left(1 - \frac{2}{f(2)}\right)\left(1 - \frac{2}{f(3)}\right)\cdots\left(1 - \frac{2}{f(100)}\right)$$

puede escribirse como $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros positivos primos relativos, encuentra el valor de $a + b$.

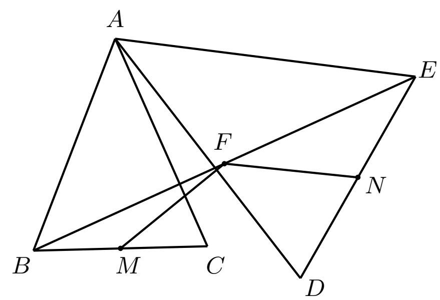
11) Los hexágonos regulares A_0 y B_0 tienen lados iguales a 1. Para cada entero positivo n, el hexágono regular A_n se construye uniendo los puntos medios de los lados del hexágono regular A_{n-1}. El hexágono regular B_n se construye traslapando dos triángulos equiláteros con vértices de B_{n-1}. En la siguiente figura se muestran los hexágonos regulares A_1 y B_1. La razón del área de A_{2020} entre el área de B_{2020} puede escribirse de la forma $(\frac{a}{b})^c$ donde a, b, c son enteros positivos y a, b son primos relativos. Si c toma el valor máximo posible, encuentra el valor de $\frac{c}{a+b}$.



12) El número de mi casa tiene cuatro dígitos diferentes. Si se suman todos los números que se pueden formar con tres de esos cuatro dígitos, se obtiene un total igual al cuadrado de la suma de esos cuatro dígitos multiplicado por mi edad e igual al número de mi casa multiplicado por $\frac{36}{13}$. Encuentra el cociente del número de mi casa entre mi edad.

Parte B

13) Sean ABC y ADE dos triángulos isósceles semejantes entre sí, donde $AB = AC$, $AD = AE$ y $\angle BAD = \angle CAE$. Llamemos M, N y F a los puntos medios de BC, DE y BE, respectivamente. Determina el valor de la razón $\frac{MF}{FN}$.



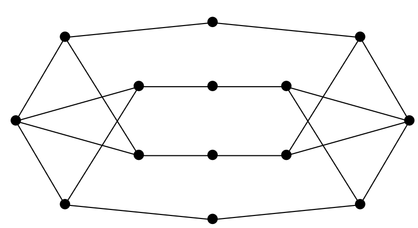
14) Determina todos los enteros a, b y c distintos de cero tales que a sea divisor de $b-c$, b sea divisor de $c-a$ y c sea divisor de $a-b$.

15) En un $2n$-ágono regular se han marcado sus vértices, sus lados, su centro y las n diagonales que pasan por el centro. Si A y B son dos vértices diametralmente opuestos del $2n-$ágono, ¿de cuántas formas se puede ir de A a B moviéndose sobre las líneas de la figura sin pasar dos veces por el mismo punto?

Prueba por Equipos, Nivel III

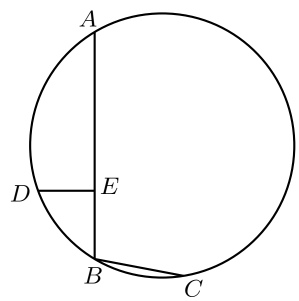
1) Daniela está parada en el vértice A del cuadrado $ABCD$. Va a lanzar una moneda: si cae águila, avanzará al siguiente vértice en el sentido de las manecillas del reloj; si cae sol, avanzará al vértice anterior en el sentido de las manecillas del reloj. Si Daniela lanza la moneda un total de 10 veces y tras el último lanzamiento Daniela cae en el vértice A, ¿de cuántas formas pudo haber sucedido esto?

2) La siguiente figura consta de 14 vértices y 20 segmentos. Se dice que dos vértices son vecinos si hay una línea que empieza en uno de ellos y acaba en otro. Raúl quiere elegir algunos vértices de manera que entre los vértices que eligió y sus vecinos, estén elegidos todos los vértices. ¿Cuál es la mínima cantidad de vértices que debe elegir Raúl para lograr esto?



3) Encuentra la suma de todos los números enteros n de tres dígitos distintos, para los cuales la suma de todos los números de dos dígitos que se pueden formar con los dígitos de n sea igual al doble de n. Por ejemplo, si $n = 123$, entonces los números de dos dígitos distintos que se pueden formar con los dígitos de n son 12, 13, 21, 23, 31 y 32.

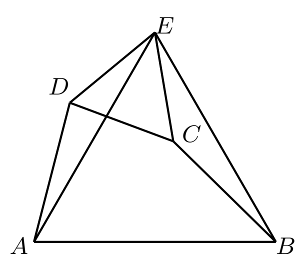
4) En la siguiente figura, los puntos A, D, B y C están sobre una misma circunferencia Γ. El punto E está sobre el segmento AB de tal manera que DE es perpendicular a AB. Si $EB = 3$ cm, $BC = 4$ cm y $AD = DC$, encuentra la medida, en cm, del segmento AE.



5) Emmanuel tiene un candado con una clave de 4 dígitos, pero se le olvidó la contraseña. Recuerda que todos los dígitos son diferentes, que el número es múltiplo de 45, que tiene exactamente un dígito par y que el número comienza con 9 o 4. Si k es el mínimo número de intentos que requiere para poder asegurar que sabe la clave del candado, ¿cuál es el valor de $100k$?

6) Sean a, b y c números reales que cumplen $a^2 - ab = b^2 - bc = c^2 - ca = 1$. Determina el valor numérico de $abc(a + b + c)$.

7) En el cuadrilátero convexo $ABCD$, se tiene que $\angle BAD + \angle ABC = 120°$, $AD = BC = 5$ cm y $AB = 8$ cm. Además, se construye por fuera del cuadrilátero el triángulo equilátero CDE. Si el área del triángulo ABE es de x cm^2, encuentra el valor de x^2.



Nota: El cuadrilátero $ABCD$ es *convexo* si sus diagonales AC y BD están completamente contenidas en él.

8) Demuestra que si n es un entero positivo tal que $3n + 1$ y $10n + 1$ son cuadrados, entonces $29n + 11$ no puede ser un número primo.

Soluciones de la Prueba Individual, Nivel III

Parte A

1) Como hay 9 monedas, tenemos $\binom{9}{2} = 36$ maneras de quitar dos monedas. Ahora, falta contar la cantidad de maneras en que se pueden quitar las dos monedas de casillas que comparten un lado, lo cual es equivalente a contar cuántas aristas tiene una cuadricula de 3×3 sin contar las del exterior. Es fácil ver que hay 12 de estas aristas, por lo que en total hay 24 maneras de quitar dos monedas que no se encuentren en casillas que comparten un lado.

2) Observemos que la terna $a = 1$, $b = 3$ y $c = 12$ satisface que $a + b + c = 16$ y $abc = 36$ son cuadrados perfectos. Demostraremos que el valor mínimo de $a+b+c$ es 16. Como a, b y c son distintos, tenemos que $a + b + c \geq 1 + 2 + 3 = 6$. Supongamos que $a + b + c = 9$. Las posibilidades de escribir a 9 como suma de tres enteros positivos distintos son: $1 + 2 + 6$, $1 + 3 + 5$ y $2 + 3 + 4$. Sin embargo, ninguno de los productos $1 \times 2 \times 6 = 12$, $1 \times 3 \times 5 = 15$ y $2 \times 3 \times 4 = 24$ es un cuadrado perfecto. Por lo tanto, el valor mínimo de $a + b + c$ es 16.
Ahora, demostraremos que el valor mínimo del producto abc es 36. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $1 \leq a < b < c$.
Si $abc = 4$, entonces $4 = abc > a^3$, de donde $a \leq 1$. Luego, $a = 1$ y $bc = 4$, lo cual no es posible.
Si $abc = 9$, entonces $9 = abc > a^3$, de donde $a \leq 2$, esto es, $a = 1$ o 2. Si $a = 1$, entonces $bc = 9$, lo cual no es posible. Si $a = 2$, entonces abc es par, lo que es una contradicción.
Si $abc = 16$, entonces $16 = abc > a^3$, de donde $a \leq 2$, esto es, $a = 1$ o 2. Si $a = 1$, entonces $bc = 16$, de donde la única posibilidad es $b = 2$ y $c = 8$. Sin embargo, la suma $a + b + c = 1 + 2 + 8 = 11$ no es un cuadrado. Si $a = 2$, entonces $bc = 8$, lo cual no es posible.
Si $abc = 25$, entonces $25 = abc > a^3$, de donde $a \leq 2$, esto es, $a = 1$ o $a = 2$. Si $a = 1$, entonces $bc = 25$, lo cual no es posible. Si $a = 2$, entonces abc es par, lo que es una contradicción.
El caso $abc = 36$ se puede obtener con $a = 1$, $b = 3$ y $c = 12$.
Por lo tanto, el valor mínimo del producto $abc(a + b + c)$ es igual a $36 \times 16 = 576$.

3) Denotaremos por $P(X)$ al perímetro de la figura X. Por las proporciones entre las alturas, deducimos que $P(ACF) = 14$ cm, $P(ADG) = 28$ cm y $P(BCFE) = 11$ cm. Notemos entonces que:

$$\begin{aligned}
14 + 22 &= P(ACF) + P(CDGF) \\
&= AC + CF + FA + CD + DG + GF + FC \\
&= P(ADG) + 2CF \\
&= 28 + 2CF.
\end{aligned}$$

De aquí, $CF = 4$ cm y, por lo tanto, $BE = 2$ cm. Finalmente, obtenemos que:

$$\begin{aligned} P(BDGE) &= BD + DG + GE + EB \\ &= (AD - AB) + DG + (GA - AE) + BE \\ &= P(ADG) - P(ABE) + 2BE \\ &= 28 - 7 + 4 \\ &= 25 \ \text{ cm.} \end{aligned}$$

4) Observemos que hay dos formas de que el producto de los tres números no sea divisible entre 4: que los tres números sean impares o que haya exactamente un número par que no sea divisible por 4. En el primer caso hay $\binom{10}{3} = 120$ subconjuntos y en el segundo caso hay $5\binom{10}{2} = 225$ subconjuntos, por lo que en total hay $120 + 225 = 345$ subconjuntos que satisfacen la condición.

5) Tenemos que

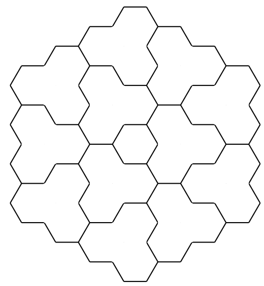
$$\begin{aligned} x_3 &= 1 + x_2, \\ x_4 &= 1 + x_2 + x_3 = 1 + x_2 + 1 + x_2 = 2(x_2 + 1) \\ x_5 &= 2^2(x_2 + 1) \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= 2^{n-2}(x_2 + 1). \end{aligned}$$

Como $x_{n+1} = 200 = 2^3 \cdot 5^2$, resulta que $x_2 + 1 = 5^2$ y, por lo tanto, $x_2 = 24$.

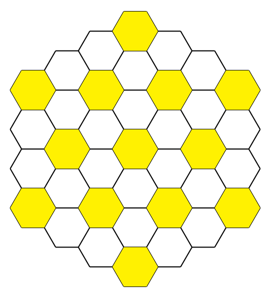
6) Sea $n = a+c = b+d$. Entonces, $c = n-a$ y $d = n-b$. Luego, la segunda condición es $a+b+(n-a)(n-b) = (n-a)+(n-b)+ab$, esto es, $2a+2b-na-nb+n^2-2n = 0$, lo cual se factoriza como $(n-2)(n-a-b) = 0$. Esto implica que $n = 2$ o $n = a + b$. En el último caso, combinando con $n = a + c$ concluimos que $b = c$, lo cual es imposible. Luego, el único valor posible de n es 2. Haciendo $a = -1$, $b = 0$, $c = 3$ y $d = 2$, obtenemos que $a + c = b + d = 2$ y $a + b + cd = c + d + ab = 5$. Por lo tanto, la respuesta es 2.

7) Notemos que $EF = 2FD$ y que $\angle DFE = 60^\circ$. Esto implica que el triángulo EFD es la mitad de un triángulo equilátero, por lo que $\angle EDF = 90^\circ$ y $ED = \sqrt{3}FD = 2\sqrt{3}$ cm. Luego, el área del pentágono $ABCDE$ es igual a la suma de las áreas de los triángulos ABC, AFE, CDF y DFE, esto es, $x = 9\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ cm^2 y, por lo tanto, $x^2 = 16^2(3) = 768$ cm^4.

8) En la siguiente partición de los hexágonos, a lo más un hexágono de cada parte puede estar coloreado, lo que demuestra que no pueden vivir más de 13 abejas en el panal.



Con la siguiente elección nos podemos dar cuenta que sí pueden vivir 13 abejas en el panal.



9) Tomemos $a \equiv 0 \pmod 9$. Entonces podemos formar la siguiente lista módulo 9:

$$\begin{aligned}
x_0 &\equiv 0,\\
x_1 &\equiv 5(0)+1 = 1,\\
x_2 &\equiv 5(1)+1 = 6,\\
x_3 &\equiv 5(6)+1 \equiv 4,\\
x_4 &\equiv 5(4)+1 \equiv 3,\\
x_5 &\equiv 5(3)+1 \equiv 7,\\
x_6 &\equiv 5(7)+1 \equiv 0.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Por esta razón, si $a \equiv 0, 1, 3, 4, 6, 7 \pmod 9$, entonces este ciclo se repite y llegamos a algún $x_k \equiv 0 \pmod 9$, dejando fuera del ciclo las congruencias 2, 5 y 8.

- Si $x_i \equiv 2 \pmod 9$ entonces $x_{i+1} \equiv 5(2)+1 \equiv 2 \pmod 9$.
- Si $x_i \equiv 5 \pmod 9$ entonces $x_{i+1} \equiv 5(5)+1 \equiv 8 \pmod 9$.
- si $x_i \equiv 8 \pmod 9$ entonces $x_{i+1} \equiv 5(8)+1 \equiv 5 \pmod 9$.

Así, cualquier a con estas congruencias módulo 9 cumple las condiciones del problema. Nótese que esto equivale a que $a \equiv 2 \pmod 3$. Por lo tanto, hay 673 números menores o iguales que 2020 que cumplen.

10) Para cualquier entero positivo n tenemos que

$$1-\frac{2}{f(n)}=\frac{f(n)-2}{f(n)}=\frac{n^2+3n}{n^2+3n+2}=\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}.$$

Por lo tanto, el producto buscado es un producto telescópico y es igual a

$$\left(\frac{1\times 4}{2\times 3}\right)\left(\frac{2\times 5}{3\times 4}\right)\left(\frac{3\times 6}{4\times 5}\right)\left(\frac{4\times 7}{5\times 6}\right)\cdots\left(\frac{99\times 102}{100\times 101}\right)\left(\frac{100\times 103}{101\times 102}\right)$$
$$=\frac{1\times 103}{3\times 101}=\frac{103}{3(101)}.$$

Como 103 y $3(101)$ son primos relativos, la respuesta es $103+303=406$.

11) Observemos primero que si $ABCDEF$ es un hexágono regular, entonces el área del triángulo ABC es igual a $\frac{1}{6}$ del área de $ABCDEF$. Luego, si M y N son los puntos medios de AB y AC, respectivamente, el área del triángulo AMN es $\frac{1}{24}$ del área de $ABCDEF$. Esto implica que

$$[A_{i+1}]=[A_i]-6\times\frac{1}{24}[A_i]=\frac{3}{4}[A_i],$$

donde $[A_i]$ representa el área del hexágono A_i. Así, $[A_{2020}]=\left(\frac{3}{4}\right)^{2020}[A_0]$.
Por otro lado, las diagonales BD y BF trisecan la diagonal AC en el hexágono regular $ABCDEF$. Esto implica que, en la figura del hexágono B_0, los doce triangulitos tienen la misma área y, más aún, el área total de tres de ellos es igual a $\frac{1}{6}$ del área de B_0. Luego,

$$[B_{i+1}]=[B_i]-4\times\frac{1}{6}[B_i]=\frac{1}{3}[B_i].$$

De aquí obtenemos que $[B_{2020}]=\left(\frac{1}{3}\right)^{2020}[B_0]$. Como $[A_0]=[B_0]$, se sigue que

$$\frac{[A_{2020}]}{[B_{2020}]}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2020}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2020}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4040}.$$

Por lo tanto, la respuesta es $\frac{4040}{3+2}=\frac{4040}{5}=808$.

12) Sea $abcd$ el número de mi casa, donde a,b,c,d son dígitos distintos. El total de números que se pueden formar con los cuatro dígitos a,b,c,d tomados de tres en tres es igual a 24 y son $abc, acb, bac, bca, cab, cba, \ldots, dcb$. La suma de estos 24 números es igual a

$$6(100a+100b+100c+100d+10a+10b+10c+10d+a+b+c+d)=666(a+b+c+d).$$

Luego, si n es mi edad, entonces

$$666(a+b+c+d)=n(a+b+c+d)^2=abcd\cdot\frac{36}{13}.$$

De aquí se sigue que $abcd$ es múltiplo de 13, esto es, $abcd = 13k$ para algún entero positivo k. Por lo tanto, tenemos que $666(a + b + c + d) = 36k$, esto es, $37(a + b + c + d) = 2k$. De esta ecuación obtenemos que k es múltiplo de 37, es decir, $k = 37p$ para algún entero positivo p. Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos que $37(a+b+c+d) = 2(37p)$ o, de manera equivalente, $a+b+c+d = 2p$. Por lo tanto, tenemos que $666(2p) = n(2p)^2$, esto es, $333 = np$, que es lo mismo que $3^2 \cdot 37 = np$. Como p es la mitad de la suma de los dígitos a, b, c, d y p está entre $6 = 0 + 1 + 2 + 3$ y $30 = 6 + 7 + 8 + 9$, concluimos que $p = 9$, $n = 37$ y $abcd = 13k = 13 \times 37 \times p = 13 \times 37 \times 9 = 3330 + 999 = 4329$.

Parte B

13) Como $\angle DAB = \angle EAC$, por el criterio LAL los triángulos DAB y EAC son congruentes. Entonces, $BD = CE$. Como M y F son puntos medios de los lados BC y BE, respectivamente, en el triángulo EBC, tenemos que $MF = \frac{1}{2}CE$. Análogamente, tenemos que $FN = \frac{1}{2}BD$. Por lo tanto,

$$\frac{MF}{FN} = \frac{\frac{1}{2}CE}{\frac{1}{2}BD} = 1.$$

14) Consideremos dos casos.
1) Hay dos números iguales entre a, b y c. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a = b$. Como $b = a$ divide a $a - c$, se sigue que $a \mid c$. Es fácil ver que las otras dos condiciones se satisfacen. Luego, en este caso, las ternas son de la forma (a, a, c) con a divisor de c.
2) Todos los números a, b y c son distintos entre sí. Observemos que los tres enteros no pueden ser positivos, ya que por las condiciones del problema el mayor debe dividir a la diferencia de los dos menores. Si los tres enteros son negativos, multiplicando por -1 caemos al caso en que todos son positivos, lo cual no puede ser.
Si hay dos negativos y uno positivo, multiplicando por -1 tendríamos el caso de un negativo y dos positivos. Luego, basta considerar el caso de un negativo y dos positivos.
Supongamos que $a > b > 0 > c$ y sea $c = -d$ con $d > 0$. Tenemos que a divide a $b + d$ y d divide a $a - b$. Esto implica que $a \leq b + d$ y $d \leq a - b$, esto es, $a \leq b + d$ y $b + d \leq a$. Por lo tanto, $a = b + d$, esto es, $a = b - c$. Como b divide a $c - a$, tenemos que b divide a $c - (b - c) = 2c - b$, lo cual implica que b divide a $2c$. Por lo tanto, las ternas en este caso son de la forma $(b - c, b, c)$ con b divisor de $2c$.

15) Hay dos caminos que no pasan por el centro. Hay dos tipos de caminos que pasan por el centro pero que no usan ni la arista de A ni la arista de B. Del primer tipo son los que quedan en cada uno de los dos arcos que van de A a B y de estos hay $2\binom{n-1}{2}$, puesto que hay dos arcos y, en cada arco, el camino queda determinado al escoger cualquier par de aristas hacia el centro. Del otro tipo de caminos son los que una arista está en uno de los arcos de A a B y la otra arista está del otro lado; de este tipo hay $2(n - 1)^2$. Ahora, hay $2n - 1$ caminos que usan la arista de A y hay

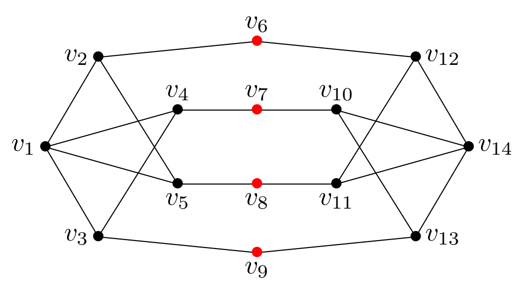
$2n-2$ caminos que usan la arista de B pero no la de A. Por lo tanto, la respuesta es

$$2+2\binom{n-1}{2}+2(n-1)^2+2n-1+2n-2=3\left(n^2-n+1\right).$$

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel III

1) De los 2^{10} casos posibles, buscamos aquellos donde $\pm1\pm1\pm\cdots\pm1$ sea un múltiplo de 4. Como la suma máxima es 10 y cambiar un positivo por un negativo resta 2, la cantidad de signos negativos puede ser 1, 3, 5, 7 o 9. Las maneras de elegir su posición son $\binom{10}{1}+\binom{10}{3}+\binom{10}{5}+\binom{10}{7}+\binom{10}{9}=2^9=512$.
(Observe que $2^{10}=(1+1)^{10}=\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}$ y $0=(1-1)^{10}=\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-1)^i$. Luego, $2^{10}=(1+1)^{10}-(1-1)^{10}=2(\binom{10}{1}+\binom{10}{3}+\binom{10}{5}+\binom{10}{7}+\binom{10}{9})$, de donde se obtiene el resultado).

2) Primero vamos a etiquetar los vértices:



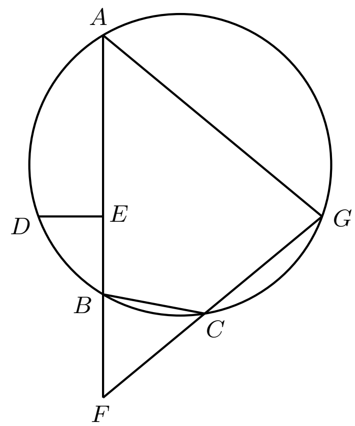
Notemos que Raúl debe elegir al menos 4 vértices de la figura ya que los vértices en rojo no son vecinos y tampoco tienen vecinos en común. Luego, eligiendo v_2, v_4, v_{11} y v_{13}, Raúl logra su cometido. Entonces, debe elegir 4 vértices.

3) Podemos escribir el número n como $n=100a+10b+c$ con $0\leq a,b,c\leq 9$ y $a\neq 0$. Cada número formado con dos dígitos de n se puede escribir como $10x+y$ con $x\in\{a,b,c\}$, $y\in\{a,b,c\}$ y $x\neq y$. Entonces, la condición del problema es equivalente a

$$\begin{aligned}2n&=2(100a+10b+c)\\&=(10a+b)+(10a+c)+(10b+a)+(10b+c)+(10c+a)+(10c+b).\end{aligned}$$

Luego,tenemos que $200a+20b+2c=22a+22b+22c$, lo cual implica que $178a=2b+20c$ o bien $89a=b+10c$.
Como $89\leq 99$, tenemos que $a\leq 1$, de donde $a=1$ y, por lo tanto, $b=9$ y $c=8$.
Por lo tanto, $n=198$ es la única solución.

4) Sea F el punto sobre el rayo AB más allá de B tal que $BF=BC$. La recta FC interseca a Γ en los puntos C y G. Como el cuadrilátero $ABCG$ es cíclico y el triángulo BCF es isósceles, se sigue que $\angle BAG=\angle BCF=\angle CFB=\angle GFA$, por lo que el triángulo AFG es isósceles con $AG=GF$.



Por otro lado, como $AD = DC$, se cumple que $\angle AGD = \angle DGC$, por lo que D está sobre la bisectriz del ángulo $\angle AGF$ y, como $AG = GF$, esta bisectriz también es la mediatriz del segmento AF, por lo que la recta GD es la mediatriz de AF. Como DE es perpendicular a AF, entonces E debe ser el punto medio del segmento AF. Por último, dado que $EB = 3$ cm y $BF = BC = 4$ cm, se sigue que $AE = EF = EB + BF = 7$ cm.

5) Como el número de la clave es múltiplo de 45, significa que es múltiplo de 9 y de 5, y esto por sus respectivos criterios de divisibilidad nos lleva a que el número termina en 5 o 0 y que la suma de sus dígitos es múltiplo de 9. Ahora dividiremos el problema en dos casos:

   a) La clave termina en 0. Esto quiere decir que ya no puede empezar con 4, pues contradiría la condición de que solo uno de los dígitos es par. Así que la clave comienza con un 9. Ahora, para que la suma de los dígitos sea múltiplo de 9, necesitamos que los dos dígitos que faltan también sumen un múltiplo de 9. Esto nos deja con que el único múltiplo de 9 que se puede sumar es 9, lo que es una contradicción, ya que al ser 9 un número impar, uno de los dígitos deberá ser par y el otro impar, pero habíamos quedado que ya no podíamos tener más dígitos pares. Concluimos que este caso no tiene solución.

   b) La clave termina en 5. Este caso lo dividiremos en dos subcasos.

      1) La clave comienza con 9. En este caso tenemos que la suma de los dígitos al momento es $9 + 5 = 14$, por lo que para que al sumarle las otras dos cifras faltantes el resultado sea múltiplo de 9 necesitamos que la suma de dichas cifras deje residuo 4 al dividirse entre 9. Así que tenemos solo las opciones de que las dos cifras faltantes sumen 4 o 13. La primera posibilidad no puede suceder, ya que como 4 es par, tenemos que sumar dos dígitos pares o dos dígitos impares, haciendo imposible cumplir que solo haya un dígito par. Concluimos que la suma de los dígitos faltantes debe ser 13. Lo que nos deja con las siguientes contraseñas posibles $\{9765, 9675\}$ (9855 no porque se repite el 5).

2) La clave empieza con un 4. En este caso tenemos que la suma de los números al momento es $4 + 5 = 9$, así que la suma de las cifras faltantes debe ser también un múltiplo de 9. Como estamos sumando dos dígitos distintos, la única opción posible es que sumen 9, lo que es una contradicción. Concluimos que este subcaso no tiene solución.

Por lo tanto, solo hay dos combinaciones posibles para la clave y entonces solo deberá hacer un único intento para asegurar que sabe la contraseña, ya que después de este intento, si no se abre el candado, ya solo tiene una opción posible, así que esa será la contraseña. Esto significa que $k = 1$ y, por consiguiente, $100k = 100$.

6) Notemos que la ecuación $a^2 - ab = 1$ es equivalente a la ecuación $a^2bc - ab^2c = bc$. De las otras dos ecuaciones, obtenemos que $ab^2c - abc^2 = ac$ y $abc^2 - a^2bc = ab$. Sumando estas últimas tres ecuaciones, resulta que $ab + bc + ca = 0$.
Por otro lado, se sabe que $a^2 = ab + 1$, $b^2 = bc + 1$ y $c^2 = ca + 1$. Multiplicando estas tres ecuaciones obtenemos que

$$a^2b^2c^2 = a^2b^2c^2 + abc(a + b + c) + (ab + bc + ca) + 1.$$

Como $ab + bc + ca = 0$, se sigue que $abc(a + b + c) = -1$.

Solución alternativa. De la condición $a^2 - ab = b^2 - bc = c^2 - ca = 1$, obtenemos que $a(a - b) = b(b - c) = c(c - a) = 1$. Multiplicando estas tres igualdades resulta que $abc(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.
Por otro lado, tenemos que

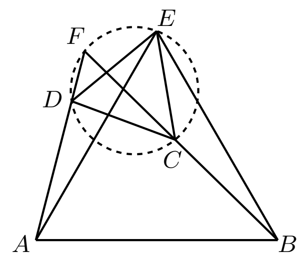
$$\begin{aligned}(a - b)(b - c)(c - a) &= ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a\\ &= ab(b - a) + bc(c - b) + ca(a - c)\end{aligned}$$

y también $ab(b-a) = -ba(a-b)$, $bc(c-b) = -cb(b-c)$ y $ca(a-c) = -ac(c-a)$. Luego,

$$(a - b)(b - c)(c - a) = -ba(a - b) + -cb(b - c) + -ac(c - a) = -b - c - a.$$

Por lo tanto, $1 = abc(a - b)(b - c)(c - a) = abc(-a - b - c) = -abc(a + b + c)$, lo cual implica que $abc(a + b + c) = -1$.

7) Sea $\alpha = \angle ADC$. Notemos que $\angle ADE = 60^\circ + \alpha$. Como $\angle BAD + \angle ABC = 120^\circ$, se sigue que $\angle BCD = 240^\circ - \alpha$, por lo que $\angle BCE = 60^\circ + \alpha$. Como $AD = BC$ y $DE = CE$, por el criterio LAL de congruencia tenemos que los triángulos ADE y BCE son congruentes, por lo que $AE = BE$, es decir, el triángulo ABE es isósceles. Más aún, la congruencia anterior implica que $\angle AED = \angle BEC$, lo que a su vez implica que $\angle AEB = \angle DEC = 60^\circ$ y, por lo tanto, el triángulo ABE es equilátero. De aquí es fácil calcular su área sabiendo que su lado mide 8 cm, esto es, $x = 16\sqrt{3}$ cm^2 y, por consiguiente, $x^2 = 768$ cm^4.



Otra solución. La idea es la misma que en la solución anterior, mostrar la congruencia de los triángulos ADE y BCE, solamente que damos otra manera de justificar que $\angle ADE = \angle BCE$. Por ángulos suplementarios, basta ver que $\angle FDE = \angle FCE$ (donde F es la intersección de BC con AD). Esto último será inmediato si mostramos que el cuadrilátero $DCEF$ es cíclico. Pero el cuadrilátero es cíclico ya que los ángulos $\angle DFC$ y $\angle DEC$ son iguales a $60°$, el primero porque $\angle DFC = 180° - (\angle BAD + \angle ABC) = 180° - 120° = 60°$ y el segundo por ser ángulo del triángulo equilátero CDE.

8) Supongamos que $3n + 1 = a^2$ y $10n + 1 = b^2$ con a y b enteros positivos y que $29n + 11 = p$ es primo. Multiplicando las primeras dos igualdades, obtenemos que $(ab)^2 = (3n + 1)(10n + 1) = 30n^2 + 13n + 1$. Luego,

$$(ab)^2 - (n + 1)^2 = 30n^2 + 13n + 1 - (n^2 + 2n + 1) = 29n^2 + 11n = np,$$

esto es, $np = (ab - n - 1)(ab + n + 1)$. De aquí se sigue que al menos uno de los factores en el lado derecho es divisible por p y, por consiguiente, es al menos p. Como $ab + n + 1 \geq ab - n - 1$, tenemos que $ab + n + 1 \geq p$, de donde $ab \geq 28n + 10$. Se sigue que $(ab)^2 \geq (28n + 10)^2 = 784n^2 + 560n + 100$. Por otra parte, $(ab)^2 = 30n^2 + 13n + 1$, lo que es una contradicción.

Comentario. Las hipótesis del problema se verifican, por ejemplo, para $n = 8$ y $n = 96$.

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2021, No. 4

5^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 17 al 21 de junio de 2021 se llevó a cabo de manera virtual, el Concurso Nacional de la 5^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Participaron 117 estudiantes de primaria, representando a 29 entidades federativas y, 149 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

En esta ocasión, los ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos en cada nivel junto con los ganadores de medalla de plata en la prueba individual del Nivel I, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos

que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2022.

Los alumnos ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos, así como los ganadores de medalla de plata en la prueba individual del Nivel I de la 5^a OMMEB son los siguientes.

Nombre	Estado	Medalla
Zariffe Yamel Céspedes Pelayo	Hidalgo	Oro individual
Álvaro Valdez Llanes	Jalisco	Oro individual
Gonzalo Díaz Mercado	Morelos	Oro individual
Elisa María Villarreal Corona	Ciudad de México	Oro individual
Andrea María Torres Martínez	San Luis Potosí	Oro individual
Isaac Azael Juárez Martínez	San Luis Potosí	Oro por equipos
Stefano Serrano Lefler	Ciudad de México	Plata
Fernando Gael Martin Barajas	Ciudad de México	Plata
Derek	Zacatecas	Plata
Jessica Valeria	Sinaloa	Plata
Gleb Kober Kober	Baja California	Plata
Ada Valeria Sandoval Díaz	Aguascalientes	Plata
Zury Victoria Muñoz May	Veracruz	Plata
Valentina Ortega García	Zacatecas	Plata
Uriel Alejandro Wong Vargas	Morelos	Plata
Gerardo Sánchez Jiménez	San Luis Potosí	Plata
Christopher Rafael Rodríguez Moguel	Yucatán	Plata
Carmen Sugey López Trujillo	Colima	Plata

En la prueba por equipos en el Nivel I, el Estado de San Luis Potosí obtuvo el primer lugar (con 132 puntos), el Estado de Jalisco obtuvo el segundo lugar (con 125 puntos) y el Estado de Hidalgo obtuvo el tercer lugar (con 124 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel I fueron:
Primer lugar: Ciudad de México (con 260 puntos).
Segundo lugar: San Luis Potosí (con 242 puntos).
Tercer lugar: Hidalgo (con 234 puntos).

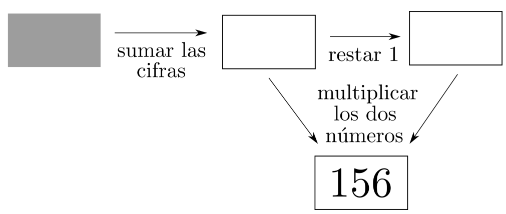
A continuación presentamos los problemas y soluciones de los exámenes individual y por equipos del Nivel I de la 5^a OMMEB.

Prueba Individual, Nivel I

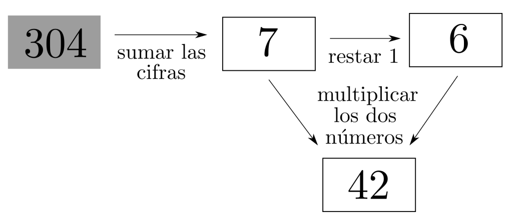
1) Un abuelo tiene dos nietos. La edad del abuelo es un número de dos cifras donde cada cifra es la edad de uno de sus nietos. Si la suma de las edades del abuelo y las de sus dos nietos es 69, ¿qué edad tiene el abuelo?

2) Sofía acaba de armar dos rompecabezas, uno de 500 piezas y uno de 1000 piezas. Quiere colgar los dos rompecabezas en su cuarto rectangular (4 paredes). Puede colgarlos en diferentes paredes o, si es en la misma pared, puede elegir cuál rompecabezas pone a la derecha y cuál a la izquierda. ¿De cuántas maneras puede hacer esto Sofía?

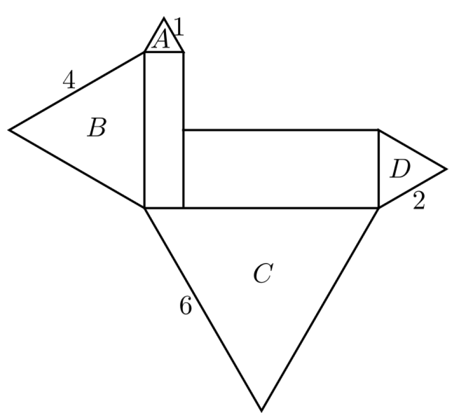
3) ¿Cuál es el número de 3 cifras más grande que puede escribirse en el cuadro sombreado del esquema, si al ejecutar las operaciones que se indican se obtiene 156?



Por ejemplo, si se pusiera el número 304 en el cuadro sombreado, el resultado sería 42, como se ve en el esquema de abajo.



4) La siguiente figura está compuesta por cuatro triángulos equiláteros y dos rectángulos. Los lados del triángulo A miden 1 cm, los del triángulo B miden 4 cm, los del triángulo C miden 6 cm y los del triángulo D miden 2 cm. ¿Cuántos centímetros mide el perímetro de toda la figura?



5) ¿Cuántos números enteros del 1 al 2021 (inclusive) cumplen que al multiplicar sus cifras se obtiene un divisor, mayor o igual que 1, del número 2021?

6) Isaac escribe en orden alfabético todas las palabras de 5 letras que se pueden formar con las letras O, M, M, E y B. Así, la palabra que está en la posición 1 es $BEMMO$, la que queda en la posición 2 es $BEMOM$, y así sucesivamente. ¿En qué número de posición se encuentra la palabra $OMMEB$?

7) Determina la suma de todos los números que tienen exactamente un múltiplo en cada una de las 5 columnas de la siguiente tabla.

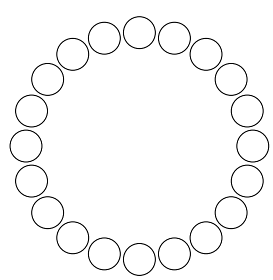
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35

8) ¿Cuántos números de siete cifras cumplen que el producto de sus cifras es 45^3 y la suma de sus cifras no es un número primo?

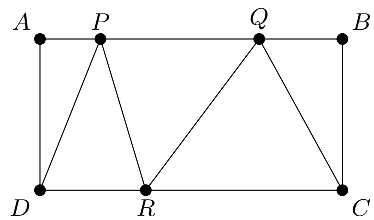
9) ¿Cuántos números de 3 cifras distintas son múltiplos de 5 y tienen sus cifras en orden decreciente (o sea, la cifra de las centenas es mayor que la de las decenas y la de las decenas es mayor que la de las unidades)?

10) Las edades de cinco hermanos, Saúl, César, Luis, Aldo y Rodrigo, son 12, 13, 14, 17 y 25 años. Si se suma la edad de Saúl con la de César se obtiene la edad de Luis. Si se suma la edad de Saúl con la de Aldo se obtiene el doble de la edad de César. ¿Cuántos años tiene Rodrigo?

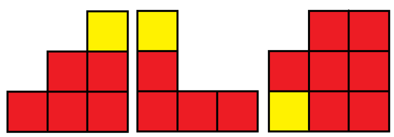
11) Diana escribe un número en cada círculo de manera que la suma de los números en los 20 círculos es 192. Alexandra llega y borra cada número y, en su lugar, escribe la suma de los dos números que estaban junto al que borró. ¿Cuánto vale la suma de los 20 números que escribe Alexandra?



12) En el rectángulo $ABCD$ se tienen los puntos P y Q en el lado AB y el punto R en el lado CD. Se sabe que el triángulo PDR tiene área igual a 7 y que el triángulo QRC tiene área 13. ¿Cuánto vale el área del rectángulo $ABCD$?

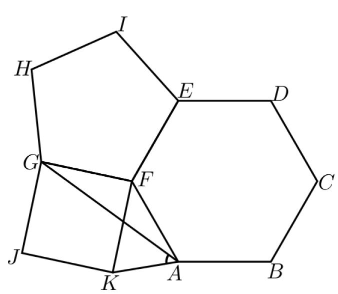


13) Usando cubos rojos y un cubo amarillo, Poncho formó una figura. Luego le tomó 3 fotos. La que aparece a la izquierda de la figura fue la foto de lado; la que aparece al centro fue la foto de frente y la que aparece a la derecha fue la foto por arriba. ¿Cuántos cubos rojos usó?



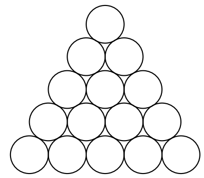
14) Gus tiene dos libros azules idénticos, dos libros verdes idénticos, dos libros rojos idénticos y dos libros blancos idénticos. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar en línea en un estante, de manera que los libros azules queden juntos?

15) La siguiente figura muestra un hexágono regular cuyos vértices son A, B, C, D, E, F, un pentágono regular cuyos vértices son E, F, G, H, I y un cuadrado cuyos vértices son F, G, J, K. ¿Cuántos grados mide el ángulo $\angle KAG$?

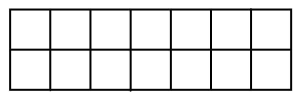


Prueba por Equipos, Nivel I

1) ¿Cuántas figuras "8" hay en el dibujo de abajo? (Una figura "8" consiste de dos círculos tangentes del mismo tamaño).

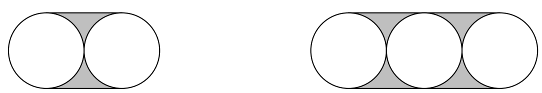


2) La siguiente figura muestra un tablero de 2×7. Por turnos, Andrés y Fernando juegan al siguiente juego: En su turno cada jugador coloca una ficha de 2×1 de manera que cubra dos cuadros de la cuadrícula, y que no se traslape con fichas previamente colocadas (es decir, no pueden colocar fichas arriba de otras). Pierde el primer jugador que, en su turno, no pueda colocar una ficha cumpliendo las condiciones. Si Andrés es el primero en colocar una ficha, determina qué jugador tiene estrategia ganadora y cuál es.

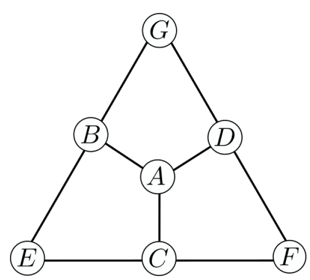


3) Pedro anotó el número de teléfono de su amiga en un pedazo de papel, pero al sacarlo de su bolsillo notó que se manchó de tinta, dejando solo visible el número $686\,520\,3XXX$. Él, para tratar de memorizarlo, se había dado cuenta que era un múltiplo de 3. También recordó que los 3 números escondidos son todos diferentes entre sí. ¿Cuántos números cumplen con las condiciones que Pedro recuerda?

4) Las siguientes dos figuras están en las posiciones 1 y 2 de un patrón. En estas tenemos círculos de radio 1 que son tangentes entre sí y, las líneas superior e inferior, son tangentes a todos los círculos. ¿Cuánto vale el área sombreada de la figura en la posición 2021?



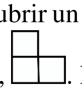
5) En la siguiente figura, dentro de cada uno de los círculos se quiere sustituir cada una de las letras A, B, C, D, E, F y G por uno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, sin repetir, de manera que la suma de los cuatro números que aparecen en cada uno de los tres cuadriláteros $ABEC$, $ABGD$ y $ACFD$ sea 15. ¿Cuánto vale la suma de todos los números por los que A puede sustituirse?

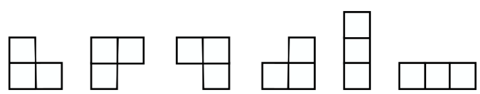


6) Decimos que un número de 5 dígitos $\overline{abcde}$ es *fósil* si cumple las siguientes condiciones:

- El número $\overline{ab}$ es múltiplo de 2.
- El número $\overline{abc}$ es múltiplo de 3.
- El número $\overline{abcd}$ es múltiplo de 4.
- El número $\overline{abcde}$ es múltiplo de 5.

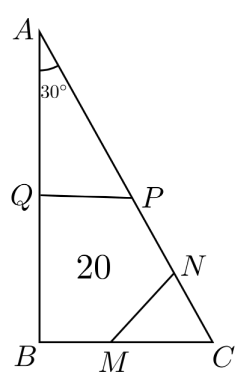
Por ejemplo, el número 50165 es fósil porque 50 es múltiplo de 2, 501 es múltiplo de 3, 5016 es múltiplo de 4 y 50165 es múltiplo de 5.
¿Cuántos números fósiles hay?

7) Se quiere cubrir un tablero de 4×3 usando triminós en forma de I,  y, triminós en forma de L, . Pueden acomodarse en cualquiera de las siguientes posiciones:



pero no pueden encimarse ni salirse de la cuadrícula de 4×3. ¿De cuántas formas es posible hacerlo?

8) En el triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en B y $\angle BAC = 30°$, se toma el punto M sobre el segmento BC, los puntos P y N sobre el segmento AC y, el punto Q, sobre el segmento AB, de tal manera que $BM = MC = CN = NP = PQ$, como se muestra en la figura. Si el área del pentágono $BMNPQ$ es 20, ¿cuál es el área del triángulo ABC?



Soluciones de la Prueba Individual, Nivel I

1) La respuesta es 57. Como la suma de las tres edades es 69, el abuelo no puede tener 70 años o más. Si el abuelo tiene al menos 60 años y menos de 70, entonces uno de los nietos tiene 6 años. Luego, necesitamos que la suma de 6 con el doble de un dígito sea igual a 9, lo cual es imposible. Si el abuelo tiene al menos 50 años y menos de 60, entonces uno de los nietos tiene 5 años. Luego, necesitamos que la suma de 5 con el doble de un dígito sea igual a 19, lo cual se logra si ponemos la edad del abuelo como 57. Si el abuelo tiene menos de 50 años, entonces el doble de un número de una cifra debería sumar al menos $69 - 44 = 25$ con el dígito de las decenas de la edad del abuelo, lo cual es imposible.

   Solución alternativa. Si la edad del abuelo es $10a + b$, entonces la suma de las edades del abuelo y de sus dos nietos es $11a + 2b = 69$. Como $0 \leq b \leq 9$, tenemos que $51 \leq 69 - 2b \leq 69$, esto es, $51 \leq 11a \leq 69$. Luego, $a = 5$ o $a = 6$. Si $a = 6$, entonces $11(6) + 2b = 69$, de donde $b = 3/2$ lo cual no puede ser porque b es un dígito. Si $a = 5$, entonces $11(5) + 2b = 69$, de donde obtenemos que $b = 7$.

2) La respuesta es 20. Dividimos en dos casos.
   1) Si los rompecabezas se cuelgan en distintas paredes, entonces hay $4 \times 3 = 12$ opciones.
   2) Si los rompecabezas se cuelgan en la misma pared, entonces hay $4 \times 2 = 8$ opciones porque hay 4 paredes y en cada una hay 2 formas de escoger cuál rompecabezas va a la izquierda.
   Por lo tanto, el número total de opciones es $12 + 8 = 20$.

3) La respuesta es 940. Trabajemos del final hacia el principio. Primero buscamos dos números consecutivos cuyo producto sea 156, estos son 12 y 13. Ahora buscamos el mayor número de 3 cifras cuya suma de dígitos sea 13, esto es, 940.

4) La respuesta es 33. Observemos que hay exactamente dos lados de cada triángulo en el perímetro, por lo que esto contribuye al perímetro en $2(1 + 2 + 4 + 6) = 26$ cm, pero falta contar los segmentos de los rectángulos que están en la orilla. Uno de estos mide la diferencia entre los lados del triángulo C y del triángulo A, que es $6 - 1 = 5$ cm y, el otro, mide la diferencia entre los lados del triángulo B y del triángulo C, que es $4 - 2 = 2$ cm. Por lo tanto, el perímetro de toda la figura es $26 + 5 + 2 = 33$ cm.

5) La respuesta es 4. Los divisores positivos del número 2021 son 1, 43, 47 y 2021. Como 43 y 47 son números primos, el producto de cifras no puede ser 2021 ni tampoco puede ser 43 o 47. El número 1 se logra como producto de las cifras de los siguientes cuatro números enteros menores o iguales que 2021: 1, 11, 111 y 1111.

6) La respuesta es 60. La palabra OMMEB es precisamente la última en el orden alfabético, por lo que necesitamos contar el número de palabras diferentes que se pueden formar. Basta permutar las cinco letras que hay y dividir entre 2 por la repetición de la letra M. El resultado es $\frac{5!}{2} = \frac{5\times4\times3\times2}{2} = 60$.

7) La respuesta es 13. Basta revisar los números del 1 al 7, pues el quinto múltiplo de un número mayor que 7 es mayor que $5\times 7 = 35$ y la tabla contiene los números del 1 al 35. Se pueden descartar fácilmente los números del 1 al 5 porque, por ejemplo, los múltiplos de 3 aparecen cada 3 números y hay 5 columnas. Comprobamos que 6 y 7 sí cumplen, así que la suma buscada es $6 + 7 = 13$.

8) La respuesta es 210. Tenemos que $45^3 = 3^6 \cdot 5^3$. Analicemos la suma de todas las posibilidades de cifras.
Si las cifras son $9, 9, 9, 5\,, 5, 5, 1$, entonces la suma es 43, que es número primo.
Si las cifras son $9, 9, 3, 3, 5, 5, 5$, la suma es $39 = 3 \times 13$. En este caso hay $\frac{7!}{2!(2!)(3!)} = 210$ números, puesto que hay 7! permutaciones de las cifras, pero hay que dividir entre $2!(2!)(3!)$ pues hay dos cifras iguales a 9, dos cifras iguales a 3 y tres cifras iguales a 5, y entonces sus permutaciones son indistinguibles.
Por lo tanto, en total hay 210 números que cumplen las condiciones.

9) La respuesta es 42. Tenemos dos posibilidades para el dígito de las unidades.
Si el dígito de las unidades es 0, los otros dos dígitos deben elegirse entre los números del 1 y al 9 y luego ordenarse de mayor a menor, así que hay $\binom{9}{2} = 36$ posibilidades.
Si el dígito de las unidades es 5, entonces los otros dos dígitos deben elegirse entre los números del 6 al 9, de manera que hay $\binom{4}{2} = 6$ posibilidades.
En total, son $36 + 6 = 42$ números.

10) La respuesta es 17. La menor suma de dos edades es $12 + 13 = 25$ por lo que 12 y 13 son las edades de Saúl y César y, la edad de Luis, es 25 años.
Si la edad de César fuera 12, entonces el doble, 24, sería la suma de las edades de Saúl y Aldo, pero ninguna pareja de edades suma 24. Esto significa que la edad de César es 13 años y la de Saúl es 12 años.
Como el doble de 13 es 26 y $26 = 12 + 14$, resulta que la edad de Aldo es 14 años y, por lo tanto, la edad de Rodrigo es 17 años.

11) La respuesta es 384. Cada número que escribe Diana va a formar parte de dos números que escribe Alexandra, ya que cada número se reemplaza por la suma de los dos números que tiene al lado. Entonces, la suma de los 20 números que escribe Alexandra es el doble de la suma de los 20 números que escribe Diana, esto es, es igual a $192 \times 2 = 384$.

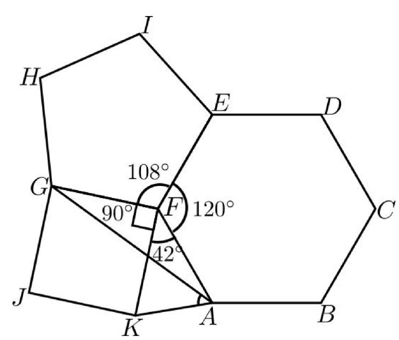
12) La respuesta es 40. Si juntamos las bases DR y RC de los triángulos PDR y QRC, obtenemos el lado DC del rectángulo $ABCD$ y, el otro lado BC, es la altura de los dos triángulos. Luego, la suma de las áreas de los triángulos PDR y QRC es la mitad del área del rectángulo $ABCD$. Entonces, el área del rectángulo $ABCD$ es igual a $2(7 + 13) = 40$.

13) La respuesta es 10. Por la vista de lado y de frente podemos deducir que el nivel de arriba solo tiene el cubo amarillo. Por la vista de frente tenemos que en el nivel de en medio, solo hay cubos en una fila. Además, en dicha fila solo falta un cubo, lo cual observamos por la vista de arriba y de lado, así tenemos que el nivel de en medio tiene dos cubos rojos. Finalmente, por la vista de arriba, podemos deducir

que al nivel de abajo solo le falta un cubo.
Por lo tanto, el número de cubos rojos es $2 + 8 = 10$.

14) La respuesta es 630. Hay 8 libros en total. Como los libros azules deben quedar juntos, podemos pensar que todos ellos forman un solo libro y entonces hay 7 lugares posibles para acomodarlo. Quedan 6 espacios. Escogemos los 2 lugares para los 2 libros verdes y eso se puede hacer de $\binom{6}{2} = 15$ formas. Ya solo quedan 4 espacios y de ellos hay que escoger 2 lugares para acomodar a los libros rojos, es decir, las posibilidades son $\binom{4}{2} = 6$. Los dos lugares para los libros blancos son los que sobran. Por lo tanto, el número total de posibilidades es $7 \times 15 \times 6 = 630$.

15) La respuesta es $45°$. Los ángulos internos de un cuadrado miden $90°$, los ángulos internos de un pentágono regular miden $\frac{180° \times 3}{5} = 108°$ y los ángulos internos de un hexágono regular miden $\frac{180° \times 4}{6} = 120°$. Entonces, tenemos que $\angle KFA = 360° - 120° - 108° - 90° = 42°$. Como $FK = FA$, el triángulo FKA es isósceles y, por consiguiente, $\angle KAF = \frac{180° - 42°}{2} = 69°$.



Por otro lado, como $GF = FA$, el triángulo GFA también es isósceles, lo cual implica que

$$\angle GAF = \frac{180° - \angle GFA}{2} = \frac{180° - GFK - \angle KFA}{2} = \frac{180° - 90° - 42°}{2} = 24°.$$

Por lo tanto, tenemos que $\angle KAG = \angle KAF - \angle GAF = 69° - 24° = 45°$.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel I

1) Paralelo a cada lado del triángulo hay figuras "8". En el lado más grande hay 4, en el que sigue hay 3, luego 2 y luego 1, haciendo un total de 10 figuras "8". Como esto es para cada lado, hay 30 figuras "8".

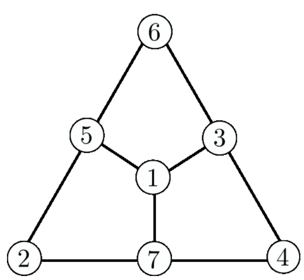
2) Demostraremos que Andrés tiene estrategia ganadora. Lo primero que debe hacer es colocar una ficha en los dos cuadros centrales. De esta forma el tablero queda dividido en dos subtableros de 2×3 y es el turno de Fernando. Ni Fernando ni Andrés pueden ahora colocar una ficha que forme parte de los dos subtableros de 2×3, por lo que cada jugada que hagan estará en alguno de los dos.

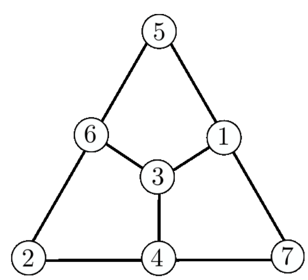
La estrategia que ahora debe seguir Andrés es colocar una ficha exactamente donde coloque Fernando, pero en el otro subtablero. Puede hacer esto ya que, después de su turno, los dos subtableros quedan iguales y Fernando solo puede poner su ficha en un subtablero. Haciendo lo anterior garantiza que siempre puede hacer un movimiento, ya que su movimiento es exactamente el mismo que el de Fernando, pero en el otro subtablero.
Como Andrés siempre puede hacer un movimiento, entonces no puede perder y, por lo tanto, Andrés gana con la estrategia mencionada.

3) Un número es múltiplo de 3 exactamente cuando la suma de sus dígitos lo es. Como $6+8+6+5+2+0+3 = 30$, los dígitos faltantes también deben sumar un múltiplo de 3. Notamos que, en la división entre 3, hay 4 dígitos con residuo 0 (que son $0, 3, 6$ y 9), 3 dígitos con residuo 1 (que son $1, 4$ y 7), y 3 dígitos con residuo 2 (que son $2, 5$ y 8). Veamos las posibilidades según los residuos, los cuales también deben sumar un múltiplo de 3.
Tres residuos 0: Hay $4 \times 3 \times 2 = 24$ números. Tres residuos 1: Hay $3 \times 2 \times 1 = 6$ números. Tres residuos 2: Hay $3 \times 2 \times 1 = 6$ números. Un residuo 0, un residuo 1 y un residuo 2: Hay $3!(4 \times 3 \times 3) = 216$ números.
El total de números que cumplen la propiedad es $24 + 6 + 6 + 216 = 252$.

4) Veamos que en cada una de las figuras del patrón, el área gris que se agrega es igual al área gris de la primera figura, pues es el área entre dos circunferencias tangentes. Por lo tanto, el área gris de la figura en la posición 2021 es 2021 veces el área gris de la primera figura. Para calcular la primera área gris vemos que esta es equivalente al área de un cuadrado de lado 2, pues el lado mide 2 radios y se le resta dos mitades de círculo. Esto nos da que el área es de $2 \times 2 - \pi = 4 - \pi$. Entonces, el área gris de la figura en la posición 2021 es de $2021(4 - \pi) = 8084 - 2021\pi$.

5) Solo hay 4 maneras de escribir a 15 como suma de 4 números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, las cuales son: $1 + 2 + 5 + 7$, $1 + 3 + 4 + 7$, $1 + 3 + 5 + 6$ y $2 + 3 + 4 + 6$. Como el número que se sustituya por A va a aparecer en los tres cuadriláteros, también debe aparecer en 3 de las sumas. Los únicos que aparecen en 3 sumas son 1 y 3 y cada uno de estos es posible, como se muestra a continuación.



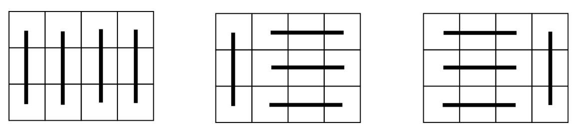


Luego, la respuesta es $1 + 3 = 4$.

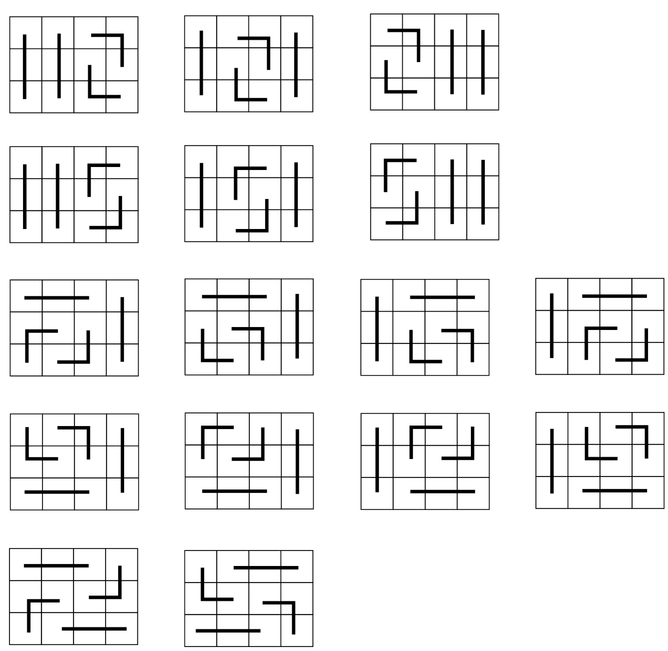
6) Por el criterio de divisibilidad del 4, para que $\overline{abcd}$ sea múltiplo de 4, debemos tener que $\overline{cd}$ es múltiplo de 4. Como hay 25 múltiplos de 4 que se pueden formar con dos

dígitos, tenemos 25 maneras de elegir al número $\overline{cd}$.
Para que $\overline{ab}$ sea múltiplo de 2, b debe ser par. Por lo tanto, tenemos 5 maneras de elegir al dígito b.
Para que $\overline{abc}$ sea múltiplo de 3, por el criterio de divisibilidad del 3 debemos tener que $a+b+c$ es múltiplo de 3. Si $b+c$ es $3, 6, 9, 12, 15$ o 18, entonces a debe ser $3, 6$ o 9. Si $b+c$ es $4, 7, 10, 13$ o 16, entonces a debe ser $2, 5$ u 8. Si $b+c$ es $2, 5, 8, 11, 14$ o 17, entonces a debe ser $1, 4$ o 7. En cualquier caso, a siempre tiene 3 opciones.
Finalmente, para que $\overline{abcde}$ sea múltiplo de 5, e debe ser 0 o 5, esto es, e tiene 2 opciones.
En total hay $25 \times 5 \times 3 \times 2 = 750$ números fósiles.

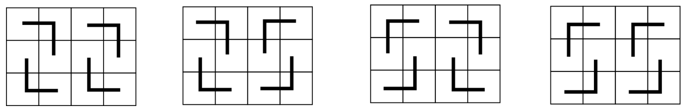
7) Contémoslos de acuerdo al número de triminós I que se pueden colocar.
Con 4 triminós I hay 3:



Con 3 triminós I no es posible cubrir el tablero.
Con 2 triminós I hay 16:

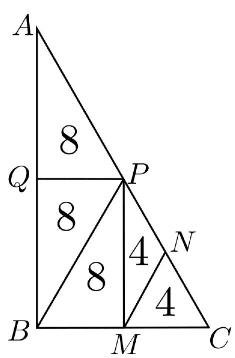


Con un solo triminó I no es posible cubrir el tablero.
Con 0 triminós I hay 4:



En total hay $3 + 16 + 4 = 23$ formas de cubrir el tablero.

8) Primero notemos que $BC = \frac{AC}{2}$ pues ABC es la mitad de un triángulo equilátero. Así, $BM = \frac{AC}{4}$ y entonces P es punto medio de AC. Como los triángulos APQ y ACB son semejantes, se sigue que Q es el punto medio de AB y, como PQ y BC son paralelas, el ángulo en B es recto y $PQ = BM$, lo que significa que $PQBM$ es un rectángulo. Por lo tanto, el área de este rectángulo es el doble del área del triángulo APQ. Por otro lado, como los triángulos PNM y PMC tienen igual altura desde M y $PN = \frac{PC}{2}$, resulta que el área del triángulo PNM es la mitad del área del triángulo CPM. Si denotamos con x al área del triángulo APQ y con y al área del triángulo PNM, tenemos que el área del pentágono $BMNPQ$ es igual a $2x + y$, esto es, $20 = 2x + y$.
Además, tenemos que el área del triángulo CPM es la mitad del área del rectángulo $PQBM$ (pues comparten la altura PM y $BM = MC$), esto es, $2y = \frac{2x}{2}$. Por lo tanto, tenemos que $20 = 2x + y$ y $2y = x$, esto es, $20 = 4y + y = 5y$, de donde $y = 4$ y $x = 2(4) = 8$. Concluimos que el área del triángulo ABC es igual a $3x + 2y = 24 + 8 = 32$.



Competencia Internacional de Matemáticas 2021 (Nivel Elemental)

La Competencia Internacional de Matemáticas del año 2021 (IIMC 2021), se llevó a cabo de forma virtual del 27 de julio al 1 de agosto de 2021 y fue organizada por Indonesia. En esta ocasión, México participó con dos equipos de Primaria y dos equipos de Secundaria, obteniendo una medalla de oro, 4 medallas de plata, 9 medallas de bronce y una mención honorífica, en las pruebas individuales. En las pruebas por equipos, se obtuvieron una medalla de plata y dos medallas de bronce.

Por segunda ocasión, un estudiante mexicano de primaria logra una medalla de oro en esta competencia internacional. En el año 2019, cuando esta competencia se realizó en Sudáfrica, un estudiante de la Ciudad de México obtuvo por primera vez una medalla de oro y México fue catalogado por los organizadores como "potencia matemática emergente". En el año 2020 la IMC se suspendió debido a la emergencia sanitaria de Covid-19, para evitar contagios entre los cientos de niños y jóvenes de más de 30 países que ya estaban convocados para viajar a Indonesia. En este 2021, derivado del entusiasmo que se generó en 2019 por el triunfo de los competidores de ese año, México participó por primera vez con dos equipos de secundaria y dos equipos de primaria. En total, 16 competidores mexicanos realizaron a distancia los exámenes correspondientes, desde 10 Estados del país.

La prueba individual del nivel elemental, consiste de 15 preguntas en el que se requiere que las respuestas sean solo números (nada de andar tratando de explicar o poner anotaciones). Son 90 minutos, cada problema vale 10 puntos y no hay puntos parciales. Como verás, la mayoría de los problemas son retadores pero no exageradamente complicados; este tipo de problemas normalmente requieren algún pequeño truco, teoremita o simplemente mucha rapidez para hacer cuentas.
Las reglas de la prueba por equipos son las mismas tanto para el nivel elemental (Pri-

maria) como para el nivel Secundaria. En ambos casos, los equipos están formados por 4 integrantes (del mismo país) y empiezan la prueba juntos. Reciben 8 problemas, cada uno impreso en una hoja individual. Empieza a correr el tiempo y tienen 10 minutos para hablar y decidir quién resolverá cuál problema, sin hacer anotaciones de ningún tipo; cada integrante debe tener al menos un problema, los problemas impares requieren solo respuesta mientras que los problemas pares requieren solución y sí pueden recibir puntos parciales. Terminados esos 10 minutos, cada integrante del equipo debe trabajar de manera individual durante 35 minutos para resolver los problemas que eligió. Al concluir esos 35 minutos, deben entregar sus hojas y vuelven a juntarse. Reciben 2 problemas más y tienen 25 minutos para resolverlos trabajando en equipo. La prueba completa dura 70 minutos.

En la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) se premia Oro, Plata, Bronce y Mención Honorífica en proporción 1:2:3:4. A diferencia de otros países participantes como India, Irán o Estados Unidos, México realiza un largo proceso selectivo, en busca de mejores resultados. Desde que un participante presenta su primer examen en su estado hasta que presenta el examen de la IMC, pueden pasar hasta dos años. Los estudiantes mexicanos que participaron en esta IMC, se seleccionaron de las preselecciones del Concurso Nacional de la 4^a OMMEB realizada en octubre de 2020 de forma virtual.

Los resultados individuales de los equipos de Primaria en la IIMC 2021 fueron los siguientes.

Nombre	**Estado**	**Medalla**	**Equipo**
Zariffe Yamel Céspedes Pelayo	Hidalgo	Plata	A
Antonio Gutiérrez Meléndez	Coahuila	Bronce	A
Artie Aarón Ramírez Villa	Jalisco	Bronce	A
Gauss Becerra Arroyo	Jalisco		A
Rodrigo Saldivar Mauricio	Zacatecas	Oro	B
Yara Peimbert Pichardo	Ciudad de México	Plata	B
Takumi Higashida Martínez	Ciudad de México	Bronce	B
Olaf Daniel Magos Hernández	Nuevo León	Bronce	B

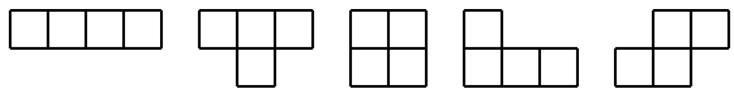
En la prueba por equipos, el Equipo A obtuvo medalla de bronce. Las medallas por equipos se otorgan a los mejores puntajes obtenidos en la prueba por equipos.
Los profesores que participaron como líderes y colíderes de cada equipo fueron: César Guadarrama Uribe (líder del Equipo A), María Guadalupe Russell Noriega (colíder del Equipo A), Carlos Jacob Rubio Barrios (líder del Equipo B) y Denisse Alejandra Escobar Parra (colíder del Equipo B).

A continuación presentamos los problemas y soluciones de la prueba individual y de la prueba por equipos en el nivel elemental (Primaria) de la IMC del año 2021.

Examen Individual, Nivel Elemental (Primaria)

Problema 1. Los números $1, 2, 3, \ldots, 20$ son escritos de forma aleatoria sobre una línea. Se suman cada tres números consecutivos y se obtienen 18 resultados no necesariamente distintos. ¿Cuál es la mayor cantidad posible de sumas impares que se pueden obtener?

Problema 2. Mónica tiene 5 tipos diferentes de piezas, llamados tetrominós, las cuales son:



Cada pieza está formada por cuatro cuadrados idénticos de lado 1 cm. Usando el mismo número de piezas de cada tipo, Mónica quiere formar un rectángulo. ¿Cuál es el menor perímetro posible, en cm, del rectángulo?

Problema 3. Se le agregan dos dígitos al número 2021, uno a la izquierda y uno a la derecha, para formar un número de seis dígitos N. Por ejemplo, se forma el número 820219 si agregamos 8 a la izquierda y 9 a la derecha. Si sabemos que N es múltiplo de 28, ¿cuál es el menor valor posible de la suma de los dígitos de N?

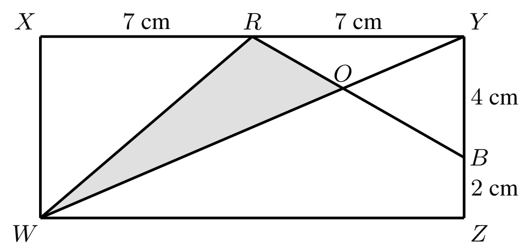
Problema 4. Se tiene una fracción en su forma reducida. Si se suma 22 al numerador, la fracción se convierte en $\frac{1}{47}$. Si se resta 5 al denominador, la fracción se convierte en $\frac{1}{96}$. ¿Cuál es el valor de la fracción original?

Problema 5. La ciudad A y la ciudad B están conectadas por un solo camino. Un autobús rojo sale de la ciudad A a las 6:20 a.m. y llega a la ciudad B a las 11:50 a.m. Un autobús azul sale de la ciudad B a las 3:35 a.m. y llega a la ciudad A a las 9:20 a.m. Si cada autobús lleva una velocidad constante sin parar, ¿a qué hora se encuentran ambos autobuses?

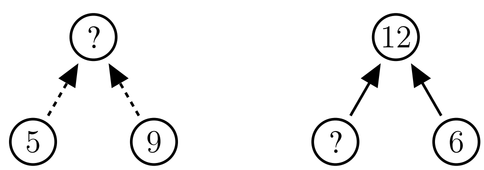
Problema 6. Una fotógrafa de la naturaleza camina por la jungla cuando de pronto ve un zorro extraño a 100 metros. Inmediatamente, el zorro comienza a huir en dirección opuesta a ella a una rapidez de 6 metros por segundo, mientras que la fotógrafa comienza a perseguirlo a una rapidez de 10 metros por segundo. La fotógrafa se puede detener y sacar su cámara en cualquier momento, pero le tomará 5 segundos después de detenerse para configurar su cámara y tomar una foto (durante este tiempo el zorro continúa huyendo). Si ella debe estar a 50 metros del zorro para tomar una buena foto, ¿cuál es la menor cantidad de tiempo en segundos, después del cual ella puede tomar una buena foto del zorro?

Problema 7. Un grupo de 48 turistas están por registrarse en un hotel. Cinco cuartos fueron reservados por un grupo distinto y el resto de los cuartos del hotel están vacantes. Al registrarse en estos cuartos, fue posible asignar a lo más 5 turistas en cada cuarto. De repente, el otro grupo cancela su reservación y los cinco cuartos ahora están disponibles para el grupo. Sin embargo, aún fue necesario asignar al menos 4 turistas en algún (algunos) cuarto(s). ¿Cuántos cuartos tiene el hotel en total?

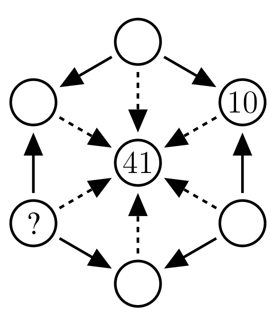
Problema 8. En la siguiente figura, $WXYZ$ es un rectángulo, R es un punto sobre XY tal que $XR = RY = 7$ cm y B es un punto sobre YZ tal que $YB = 4$ cm y $BZ = 2$ cm. Si O es el punto de intersección de RB y YW, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo ROW?



Problema 9. El siguiente rompecabezas está formado de círculos y flechas. Una flecha discontinua indica suma, mientras que una flecha continua indica multiplicación. Por ejemplo, la solución al diagrama de la izquierda es un número cuya suma es $5 + 9$, es decir, 14. La solución del diagrama de la derecha es un número que, al ser multiplicado por 6, da como resultado 12, lo que nos da como solución 2. Notemos que puede haber más de 2 flechas apuntando a un círculo, en cuyo caso hay una operación (suma o multiplicación) con más de dos números involucrados.



En el siguiente rompecabezas, si todos los círculos deben tener enteros positivos, ¿cuál número es el que debe ser escrito en el círculo que tiene el signo de interrogación?

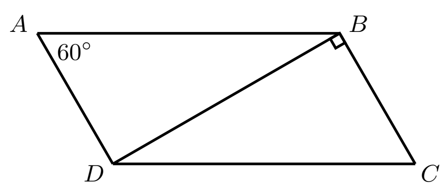


Problema 10. El número "11" tiene la **curiousa** propiedad de que puede ser expresado como la suma de una potencia entera positiva de 2 y una potencia entera positiva de 3 de al menos dos formas distintas: $11 = 2^3 + 3^1 = 8 + 3$ y $11 = 2^1 + 3^2 = 2 + 9$. ¿Cuál es el menor entero de tres dígitos que tiene esta curiousa propiedad? (Nota: las potencias enteras positivas de 2 son $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8, \ldots$ y las potencias enteras positivas de 3 son $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27, \ldots$).

Problema 11. Un rectángulo de 24×60 se divide en cuadrados unitarios (de 1×1) dibujando las líneas para formar la cuadrícula. Si una de sus diagonales también se dibuja en la figura, ¿en cuántas regiones queda dividida la figura?

Problema 12. Hay 55 estudiantes que participan en una competencia de matemáticas que tiene reglas que establecen que cada participante obtiene un "※" para cada respuesta correcta, una "★" para cada respuesta incorrecta y un "◯" para cada problema no resuelto. Suponiendo que no hay dos estudiantes que tengan el mismo número de "※"s y el mismo número de "★"s, ¿cuál es el menor número de problemas que puede tener esta competencia?

Problema 13. En la siguiente figura, $ABCD$ es un paralelogramo cuyo perímetro es 54 cm, $\angle DAB = 60°$ y $\angle DBC = 90°$. ¿Cuál es la longitud, en cm, de AB?

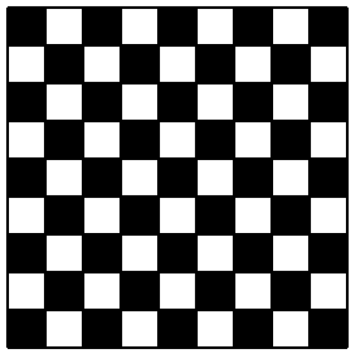


Problema 14. Un n-ágono regular $A_1A_2 \ldots A_n$ está inscrito dentro de una circunferencia con centro O. Si $\angle A_1OA_{16} = 135°$, ¿cuál es la suma de todos los valores posibles de n?

Problema 15. Comenzando con un entero positivo I, primero reordenamos sus dígitos y después le restamos 1 para obtener M. Ahora, otra vez reordenamos los dígitos de M y sumamos 1 para obtener C. Por ejemplo, si $I = 2358$, podemos obtener $C = 2259, 2358$ y 4284 entre otros valores. ¿Cuántos enteros distintos C se pueden obtener si $I = 2267$?

Examen por Equipos, Nivel Elemental (Primaria)

Problema 1. En el siguiente diagrama, se muestra un tablero de ajedrez de 9×9 en donde los cuadrados unitarios son coloreados en blanco o negro y cada una de sus cuatro esquinas se colorea de negro. Ahora, un alfil comienza en cualquier cuadrado negro. Si en cada movimiento puede ir a cualquier cuadrado negro adyacente en diagonal sin pasar por cuadrados blancos, ¿cuál es el mínimo número de movimientos requeridos para poder visitar todos los cuadrados negros, no necesariamente regresando al cuadrado inicial? Dibuja el camino.



Problema 2. Una tabla de 1×2021 se va a cortar en 2021 cuadrados unitarios en varios pasos. En cada paso, puedes cortar una sola tabla dividiéndola en dos (no necesariamente iguales), o bien cortar un conjunto de tablas de igual longitud, dividiendo cada una de ellas, en la misma forma, en dos piezas. Tu objetivo es lograr esto en el menor número de pasos. ¿Cuántos pasos necesitas? Describe tu proceso completo a detalle.

Problema 3. ¿Cuántos enteros positivos del 1 al 2021, inclusive, son divisibles por 2 o 5 pero no por otros números primos?

Problema 4. Los primeros enteros positivos, comenzando desde "1" se escriben en un pizarrón. Si uno de los números es borrado, entonces el promedio de los números restantes se convierte en $\frac{45}{4}$. ¿Cuál número fue borrado?

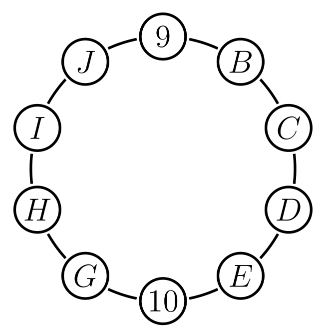
Problema 5. Un triángulo de plástico delgado está sobre una superficie y se puede voltear sobre cualquiera de sus lados repetidamente, en cada paso se voltea sobre un lado distinto al paso anterior. Siempre que su nueva posición comparta un punto interior con su posición inicial después de varios volteos, los dos triángulos deben coincidir perfectamente.
Si los triángulos con ángulos iguales son vistos como el mismo triángulo, encuentra los ángulos de todos los posibles triángulos con esta propiedad.
(Nota: El número de respuestas correctas menos el número de respuestas incorrectas es la respuesta correcta neta y son 3 puntos por cada respuesta correcta neta. Encontrar todas las respuestas correctas sin respuestas incorrectas da 40 puntos).

Problema 6. Un cubo, con lados de longitud 6 cm, va a ser cortado en 49 cubitos más pequeños. Si el tamaño de los cubitos no es necesariamente el mismo pero las longitudes de los lados, en cm, de los cubitos son números enteros, ¿cuántos tipos de cubos de diferentes tamaños tenemos? ¿Cuántos cubitos de cada tamaño tenemos?

Problema 7. Satya tiene cierto número de manzanas y naranjas. Se sabe que el total de estas frutas que tiene inicialmente está entre 100 a 300 y la razón entre el número de manzanas y el número de naranjas es $7:4$. Entonces, cada día, él se come, aleatoriamente, dos de ellas, pero no necesariamente del mismo tipo. En el décimo día, después de comer dos de ellas, la razón se convirtió en $8:5$. ¿Cuántas manzanas y naranjas tiene inicialmente en total Satya?

Problema 8. ¿Cuántos números enteros positivos de 10 dígitos múltiplos de 11111 no tienen dígitos iguales?

Problema 9. En el diagrama siguiente, diez perlas etiquetadas como A, B, C, D, E, F, G, H, I y J son acomodadas en orden de las manecillas del reloj sobre un círculo, donde la perla A es etiquetada como 9 y la perla F es etiquetada como 10.



Las restantes ocho perlas serán etiquetadas con los números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y 8, usando cada número exactamente una vez. Si el número de G debe ser más grande que el número de E y la suma de los números de cualesquiera dos perlas adyacentes debe ser un número primo, enlista todas las posibles diferentes formas de etiquetar.
(Nota: El número de respuestas correctas menos el número de respuestas incorrectas es la respuesta correcta neta y son 2 puntos por cada respuesta correcta neta. Encontrar todas las respuestas correctas sin respuestas incorrectas da 40 puntos).

Problema 10. El camino entre la ciudad M y la ciudad S es de 15 km de largo. Ana y Boris ambos dejan la ciudad M a mediodía, Ana camina y Boris va en bicicleta. Mientras tanto, su amiga Olga camina de la ciudad S a la ciudad M y los tres van viajando sobre el mismo camino. Cuando Boris encuentra a Olga, él le da a Olga la bici y camina el resto del trayecto, mientras que Olga se va en bici hasta que encuentra a Ana y le da a Ana la bici. Ana entonces se va el resto del trayecto en bici, llegando a la ciudad S al mismo tiempo que Boris. Si la velocidad en que camina cada persona es 6 km/h y la velocidad cuando van en bici es 15 km/h, ¿cuántas horas antes de mediodía se fue Olga de la Ciudad S?

Soluciones del Examen Individual

Solución del Problema 1. La respuesta es 17. Es imposible que todas las 18 sumas sean impares, pues si así fuera podríamos ordenar a los números de alguna de las siguientes formas, donde i significa impar y p significa par:

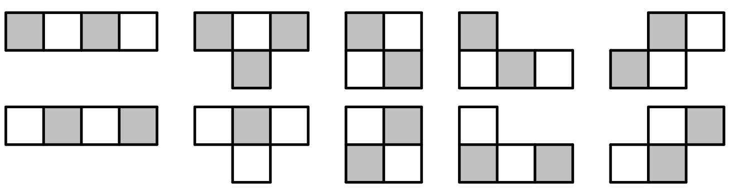
$$iiiiii\ldots,\ \ ippipp\ldots,\ \ pippip\ldots \ \text{ o } \ ppippi\ldots$$

Como hay 10 números impares y 10 números pares, es imposible obtener cualquiera de las cuatro secuencias anteriores.
Sin embargo, podemos obtener 17 sumas impares; por ejemplo, cuando el orden de los números sobre la línea sigue la secuencia:

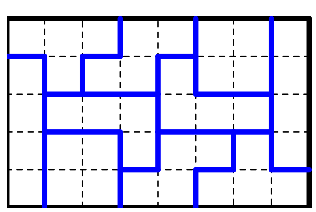
$$ippippippippippiiiii \ \text{ o } \ ppippippippippiiiiii.$$

En estos casos, la única suma par es la 15^a o la 14^a, mientras que todas las otras son impares.

Solución del Problema 2. La respuesta es 26 cm. Si n denota el número de piezas que usa Mónica, entonces el número de cuadrados en un rectángulo es $20n$. Como este número es par, si pintamos el rectángulo como tablero de ajedrez tendremos la misma cantidad de cuadrados negros que de cuadrados blancos. Cada una de las piezas cubre 2 cuadrados negros y 2 cuadrados blancos, salvo la pieza con forma de T que cubre 1 o 3 cuadrados negros. Necesitamos un número par de ellas, así que n debe ser par. Luego, n es al menos 2.



Si $n = 2$, el área del rectángulo es 40 cm^2 y los posibles perímetros son: $2\times(1+40) =$ 82 cm, $2 \times (2 + 20) = 44$ cm, $2 \times (4 + 10) = 28$ cm y $2 \times (5 + 8) = 26$ cm.
Un rectángulo de perímetro 26 cm hecho con los tetrominós se muestra en la siguiente figura.



Si $n \geq 4$, el área del rectángulo es mayor que 80 cm^2 $> 8 \times 8$ cm^2 y el perímetro es mayor que $2 \times (8 + 8) = 32$ cm.
Por lo tanto, el perímetro mínimo es 26 cm.

Solución del Problema 3. La respuesta es 12. Sea $N = \overline{a2021b}$ el cual es múltiplo de $28 = 4 \times 7$. Como N es múltiplo de 4, entonces por el criterio de divisibilidad del 4, el número $\overline{1b}$ es múltiplo de 4, lo cual implica que $b = 2$ o $b = 6$.
Si $b = 2$ y $a = 1$, entonces $N = 120212$ que no es múltiplo de 7.
Si $b = 2$ y $a = 2$, entonces $N = 220212$ que no es múltiplo de 7.
Si $b = 2$ y $a = 3$, entonces $N = 320212$ que no es múltiplo de 7.
Si $b = 2$ y $a = 4$, entonces $N = 420212$ que no es múltiplo de 7.
Si $b = 2$ y $a = 5$, entonces $N = 520212 = 7 \times 74316$ es múltiplo de 7.
Esto significa que con $b = 2$, el número $N = 520212$ tiene la menor suma de dígitos y es múltiplo de 7.
Si $b = 6$ y $a = 1$, entonces $N = 120216$ que no es múltiplo de 7.
Si $b = 6$ y $a \geq 2$, entonces la suma de los dígitos de N es mayor que 12.
Por lo tanto, el menor valor posible de la suma de los dígitos de N es $5 + 2 + 0 + 2 + 1 + 2 = 12$.

Solución del Problema 4. La respuesta es $\frac{21}{2021}$. Supongamos que la fracción original es $\frac{x}{y}$ donde x, y son primos relativos. Sumando 22 al numerador, obtenemos que $\frac{x+22}{y} = \frac{1}{47}$, esto es, $y = 47x + 1034$. Restando 5 al denominador de la fracción original, obtenemos que $\frac{x}{y-5} = \frac{1}{96}$, esto es, $y = 96x + 5$. Por lo tanto, tenemos que $47x + 1034 = 96x + 5$, de donde, $49x = 1029$, esto es, $x = 21$. Luego, $y = 2021$. Como $21 = 3 \times 7$ y $2021 = 41 \times 47$, estos números son primos relativos y, por consiguiente, la fracción original es $\frac{21}{2021}$.

Solución alternativa. Cuando se suma 22 al numerador de la fracción original, la fracción que resulta es $\frac{1}{47}$. Sea a un entero positivo tal que $\frac{1}{47} = \frac{a}{47a}$. Entonces, la fracción original es $\frac{a-22}{47a}$. Restando 5 al denominador de esta fracción, obtenemos que $\frac{a-22}{47a-5} = \frac{1}{96}$, esto es, $96a - 2112 = 47a - 5$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos que $a = 43$. Entonces, $a - 22 = 21$ y $47a = 47 \times 43 = 2021$. Ahora concluimos como en la primera solución.

Solución del Problema 5. La respuesta es $7 : 48$ a.m. El autobús rojo viaja durante 5 horas 30 minutos que es igual a 330 minutos y el autobús azul viaja durante 5 horas 45 minutos que es igual a 345 minutos. Si la distancia entre las ciudades A y B es d, entonces la velocidad del autobús rojo es $\frac{d}{330}$ por minuto y la velocidad del autobús azul es $\frac{d}{345}$ por minuto. Antes de la salida del autobús rojo, el autobús azul ha viajado $\frac{165d}{345}$, lo que significa que ambos autobuses se encontrarán $(1 - \frac{165}{345}) \div (\frac{1}{330} + \frac{1}{345}) = 88$ minutos después de la salida del autobús rojo, esto es, a las $6 : 20 + 1 : 28 = 7 : 48$ a.m.

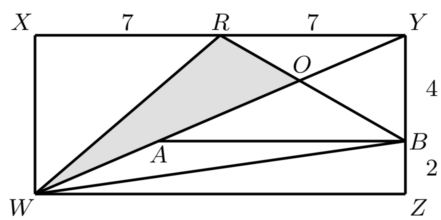
Solución del Problema 6. La respuesta es 25 segundos. Durante el tiempo que la fotógrafa necesita para configurar su cámara, el zorro se alejará $5 \times 6 = 30$ metros. Así que la fotógrafa necesita configurar su cámara cuando ella esté a $50 - 30 = 20$ metros. El zorro comienza a correr 100 metros, así que la fotógrafa necesita estar $100 - 20 = 80$ metros más cerca, con un tiempo de persecución de $80 \div (10 - 6) = 20$ segundos.

Por lo tanto, la respuesta es 20 segundos para perseguir al zorro más 5 segundos para configurar la cámara, esto es, 25 segundos.

Solución del Problema 7. La respuesta es 15. Si hay x cuartos en el primer escenario, entonces hay $x+5$ cuartos en el segundo escenario. Luego, $48 < 5x$ y $3(x+5) < 48$. De la primera desigualdad, obtenemos que $9\frac{3}{5} < x$ y, de la segunda desigualdad, obtenemos que $x < 11$. Por lo tanto, $9.6 < x < 11$. Como x es un entero positivo, necesariamente $x = 10$. Esto significa que el hotel tiene $10+5 = 15$ cuartos en total.

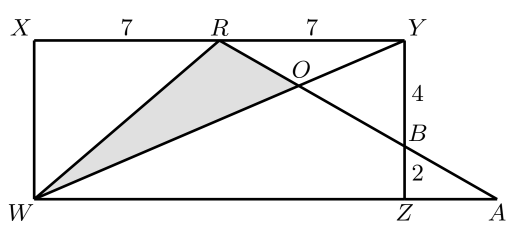
Solución alternativa. En el primer escenario, como 5 turistas son suficientes por cada cuarto y son 48 turistas, el número de cuartos disponibles es al menos 10. En el segundo escenario, como 3 turistas no son suficientes para un cuarto, el número de cuartos disponibles es a lo más 15. Como la diferencia entre los dos escenarios es 5 cuartos, concluimos que el hotel tiene 15 cuartos en total.

Solución del Problema 8. La respuesta es 15 cm^2. Tracemos una paralela a WZ por el punto B y supongamos que interseca a WY en el punto A.



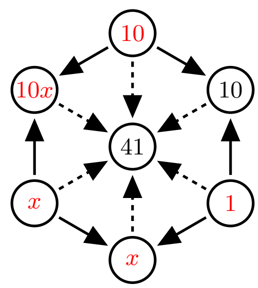
En el triángulo YWZ, tenemos que $\frac{AB}{WZ} = \frac{YB}{YZ}$ de donde, $AB = \frac{YB}{YZ} \times WZ = \frac{4}{6} \times 14 = \frac{28}{3}$ cm. Como los triángulos YOR y AOB son semejantes, tenemos que $\frac{BO}{RO} = \frac{AB}{RY} = \frac{28/3}{7} = \frac{4}{3}$. Ahora, el área del triángulo RBW la podemos calcular restando al área del rectángulo $XYZW$ las áreas de los triángulos RYB, BZW y RXW, esto es, $14 \times 6 - \frac{4\times 7}{2} - \frac{2\times 14}{2} - \frac{6\times 7}{2} = 35$ cm^2 es el área del triángulo RBW. Por lo tanto, el área del triángulo ROW es $\frac{3}{7}$ del área del triángulo RBW, esto es, es igual a $\frac{3}{7} \times 35 = 15$ cm^2.

Solución alternativa. Extendamos RB y WZ de manera que se intersequen en el punto A.

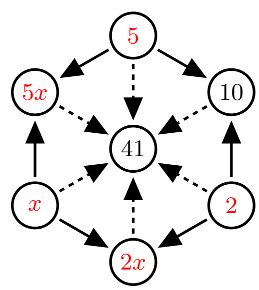


Observemos que los triángulos RYB y AZB son semejantes, así que $\frac{RY}{ZA} = \frac{YB}{BZ}$, de donde $ZA = \frac{RY\times BZ}{YB} = \frac{7\times 2}{4} = \frac{7}{2}$ cm. Como los triángulos RYO y AWO también son semejantes, tenemos que $\frac{OY}{OW} = \frac{RY}{AW} = \frac{7}{14+\frac{7}{2}} = \frac{2}{5}$. Como R es el punto medio de XY, tenemos que $(RYW) = \frac{1}{2}(XYW) = \frac{1}{4}(WXYZ) = \frac{1}{4} \times 6 \times 14 = 21$ cm^2, donde los paréntesis denotan área. Por lo tanto, el área del triángulo ROW es igual a $\frac{5}{7}$ del área del triángulo RYW, esto es, es igual a $\frac{5}{7} \times 21 = 15$ cm^2.

Solución del Problema 9. La respuesta es 3. Sea x el número que va en el círculo que tiene el signo de interrogación. Como $10 = 1 \times 10 = 2 \times 5$, tenemos dos casos.
Caso 1: $10 = 1 \times 10$. Tenemos el siguiente rompecabezas.



Entonces, $10+10+1+x+x+10x = 41$, esto es, $12x = 20$ y, por lo tanto, $x = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ que no es un número entero.
Caso 2: $10 = 2 \times 5$. Tenemos el siguiente rompecabezas.



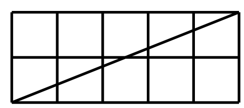
Entonces, $5 + 10 + 2 + 5x + 2x + x = 41$, esto es, $8x = 24$ y, por lo tanto, $x = 3$.

Solución del Problema 10. La respuesta es 259. Mientras que es posible verificar cada entero positivo por separado, una manera mucho más eficiente para encontrar la respuesta es hacer una tabla que contenga todas las sumas de potencias de 2 y potencias de 3 y luego ver cuáles sumas aparecen doble, como a continuación se muestra.

$+$	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
3^1	5	9	**11**	19	**35**	67	131	**259**
3^2	**11**	13	17	25	41	73	137	264
3^3	29	31	**35**	43	59	91	155	283
3^4	83	85	89	97	113	145	209	337
3^5	245	247	251	**259**	275	307	371	499

Los enteros de dos dígitos que tienen la curiousa propiedad son el 11 (mencionado en el enunciado del problema) y el $35 = 32 + 3 = 8 + 27$. El entero más pequeño de tres dígitos con la curiousa propiedad es el $259 = 256+3 = 2^8+3^1 = 2^4+3^5 = 16+243$.

Solución del Problema 11. La respuesta es 1512. Sin la diagonal, tenemos $24 \times 60 = 1440$ partes. Como el máximo común divisor de $24 = 12 \times 2$ y $60 = 12 \times 5$ es 12, podemos dividir el rectángulo en bloques de 2×5. Como 2 y 5 son primos relativos, la diagonal pasa solo por los puntos de la cuadrícula de las esquinas de los bloques.



Dentro de cada bloque, la diagonal cruzará $2 - 1 = 1$ línea horizontal de la cuadrícula y $5 - 1 = 4$ líneas verticales de la cuadrícula una a la vez. Corta el cuadrado inicial (de 1×1) en dos partes. Cada vez que cruza una línea de la cuadrícula, ingresa a un nuevo cuadrado (de 1×1) y lo corta en dos partes. Luego, se generan $1 + 1 + 4 = 6$ nuevas partes. Como la diagonal pasa por 12 bloques, el número total de partes es $1440 + 6 \times 12 = 1512$.

Solución del Problema 12. La respuesta es 9. Si hay n problemas, entonces las posibles situaciones son:

Número de ※	Número de ★	Número de ◯
n	0	0
$n-1$	1	0
	0	1
$n-2$	2	0
	1	1
	0	2
$n-3$	3	0
	2	1
	1	2
	0	3

Podemos ver que para el número de ※ de n a 0 tendremos

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

posibles situaciones. Luego, $\frac{(n+1)(n+2)}{2} \geq 55$, esto es, $(n+1)(n+2) \geq 110 = 10 \times 11$. Por lo tanto, $n \geq 9$.

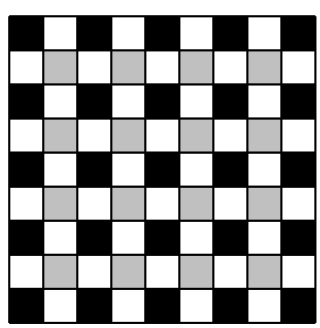
Solución del Problema 13. La respuesta es 18 cm. Como $ABCD$ es un paralelogramo, tenemos que $\angle DCB = \angle DAB = 60°$. Luego, el triángulo BCD es la mitad de un triángulo equilátero con altura BD. Entonces, $CD = 2BC$ y el perímetro del paralelogramo $ABCD$ es igual a $2(CD + BC) = 2(2BC + BC) = 6BC$, esto es, $6BC = 54$ cm de donde obtenemos que $BC = 9$ cm y, por consiguiente, $AB = CD = 2BC = 18$ cm.

Solución del Problema 14. La respuesta es 64. Los vértices $A_2, A_3, A_4, \ldots A_{15}$, están o bien en el interior del ángulo que mide $135°$, o bien, en el interior del ángulo que mide $360° - 135° = 225°$. En el primer caso, como el polígono es regular, el ángulo central que abre un arco de la forma $\widehat{A_iA_{i+1}}$ es igual a $\frac{135°}{15} = 9°$ y $n = \frac{360°}{9°} = 40$. En el segundo caso, el ángulo central que abre un arco de la forma $\widehat{A_iA_{i+1}}$ es igual a $\frac{225°}{15} = 15°$ y $n = \frac{360°}{15°} = 24$. Por lo tanto, la respuesta es $40 + 24 = 64$.

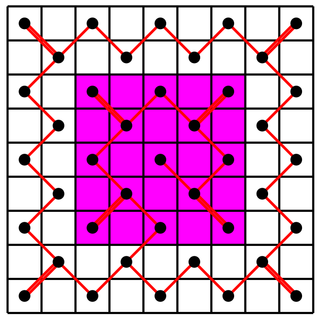
Solución del Problema 15. La respuesta es 42. Los dígitos de I son $(2, 2, 6, 7)$. Tenemos dos casos.
Caso 1. Los dígitos de C también son $(2, 2, 6, 7)$. En este caso, tenemos $4! \div 2 = 12$ valores de C.
Caso 2. Los dígitos de C no son $(2, 2, 6, 7)$. En este caso, los dígitos de M pueden ser $(1, 2, 6, 7)$, $(2, 2, 5, 7)$ o $(2, 2, 6, 6)$.
Si los dígitos de M son $(1, 2, 6, 7)$, entonces los dígitos de C pueden ser $(1, 3, 6, 7)$, $(1, 2, 7, 7)$ o $(1, 2, 6, 8)$.
Si los dígitos de M son $(2, 2, 5, 7)$, entonces los dígitos de C pueden ser $(2, 3, 5, 7)$ o $(2, 2, 5, 8)$.
Si los dígitos de M son $(2, 2, 6, 6)$, entonces los dígitos de C pueden ser $(2, 3, 6, 6)$.
Notemos que el último dígito de C debe ser aquel que ha incrementado. Luego, cada una de las opciones $(1, 3, 6, 7)$, $(1, 2, 7, 7)$, $(1, 2, 6, 8)$ y $(2, 3, 5, 7)$ nos da $(4 - 1)! = 6$ valores de C, mientras que cada una de las opciones $(2, 2, 5, 8)$ y $(2, 3, 6, 6)$ nos da $(4 - 1)! \div 2 = 3$ valores de C. Así, en este caso hay $4 \times 6 + 2 \times 3 = 30$ valores de C. Por lo tanto, en total hay $12 + 30 = 42$ valores de C.

Soluciones del Examen por Equipos

Solución del Problema 1. Consideremos el siguiente tablero donde se han marcado 25 cuadrados negros a los cuales llamaremos cuadrados "super negros".



Como el alfil debe visitar todos los cuadrados negros, en particular debe visitar a los 25 cuadrados super negros. Para ir de un cuadrado super negro a otro cuadrado super negro, al menos 2 movimientos son necesarios. Si el alfil comienza en un cuadrado super negro y termina (pasando por todos los cuadrados negros) en otro cuadrado super negro, entonces al menos se necesitan $2 \times 24 = 48$ movimientos. El siguiente diagrama muestra que son posibles 48 movimientos.



Solución del Problema 2. Una forma es como se muestra a continuación.

No. de corte	**Tabla(s) cortada(s)**	**Forma de dividir**	**Tablas después del corte**
1	1 de longitud 2021	$2021 = 2016 + 5$	1 de longitud 2016 y 1 de longitud 5
2	1 de longitud 2016	$2016 = 1792 + 224$	1 de longitud 1792, 1 de longitud 224 y 1 de longitud 5
3	1 de longitud 1792	$1792 = 896 + 896$	2 de longitud 896, 1 de longitud 224 y 1 de longitud 5
4	2 de longitud 896	$896 = 448 + 448$	4 de longitud 448, 1 de longitud 224 y 1 de longitud 5
5	4 de longitud 448	$448 = 224 + 224$	9 de longitud 224 y 1 de longitud 5
6	9 de longitud 224	$224 = 112 + 112$	18 de longitud 112 y 1 de longitud 5
7	18 de longitud 112	$112 = 56 + 56$	36 de longitud 56 y 1 de longitud 5
8	36 de longitud 56	$56 = 28 + 28$	72 de longitud 28 y 1 de longitud 5
9	72 de longitud 28	$28 = 14 + 14$	144 de longitud 14 y 1 de longitud 5
10	144 de longitud 14	$14 = 7 + 7$	288 de longitud 7 y 1 de longitud 5

11	288 de longitud 7	$7 = 5 + 2$	289 de longitud 5 y 2 de longitud 2
12	289 de longitud 5	$5 = 4 + 1$	289 de longitud 4, 288 de longitud 2 y 289 de longitud 1
13	289 de longitud 4	$4 = 2 + 2$	866 de longitud 2 y 289 de longitud 1
14	866 de longitud 2	$2 = 1 + 1$	2021 de longitud 1

A continuación mostramos otra forma.

No. de corte	**Tabla(s) cortada(s)**	**Forma de dividir**	**Tablas después del corte**
1	1 de longitud 2021	$2021 = 2016 + 5$	1 de longitud 2016 y 1 de longitud 5
2	1 de longitud 2016	$2016 = 1008 + 1008$	2 de longitud 1008 y 1 de longitud 5
3	2 de longitud 1008	$1008 = 504 + 504$	4 de longitud 504 y 1 de longitud 5
4	4 de longitud 504	$504 = 252 + 252$	8 de longitud 252 y 1 de longitud 5
5	8 de longitud 252	$252 = 126 + 126$	16 de longitud 126 y 1 de longitud 5
6	16 de longitud 126	$126 = 63 + 63$	32 de longitud 63 y 1 de longitud 5
7	32 de longitud 63	$63 = 56 + 7$	32 de longitud 56, 32 de longitud 7 y 1 de longitud 5
8	32 de longitud 56	$56 = 28 + 28$	64 de longitud 28, 32 de longitud 7 y 1 de longitud 5
9	64 de longitud 28	$28 = 14 + 14$	128 de longitud 14, 32 de longitud 7 y 1 de longitud 5
10	128 de longitud 14	$14 = 7 + 7$	288 de longitud 7 y 1 de longitud 5
11	288 de longitud 7	$7 = 5 + 2$	289 de longitud 5 y 2 de longitud 2
12	289 de longitud 5	$5 = 4 + 1$	289 de longitud 4, 288 de longitud 2 y 289 de longitud 1
13	289 de longitud 4	$4 = 2 + 2$	866 de longitud 2 y 289 de longitud 1
14	866 de longitud 2	$2 = 1 + 1$	2021 de longitud 1

Solución alternativa. Es claro que cada tabla obtenida en un paso intermedio, debe tener longitud entera. Un posible algoritmo es el siguiente:

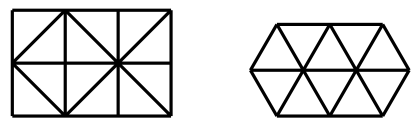
$$\begin{aligned}
2021 &= 2016 + 5 = 1792 + 224 + 5 = 2 \times 896 + 224 + 5 = 4 \times 448 + 224 + 5 \\
&= 9 \times 224 + 5 = 18 \times 112 + 5 = 36 \times 56 + 5 = 72 \times 28 + 5 \\
&= 144 \times 14 + 5 = 288 \times 7 + 5 = 289 \times 5 + 288 \times 2 \\
&= 289 \times 4 + 289 \times 1 + 288 \times 2 \\
&= 866 \times 2 + 289 \times 1 = 2021 \times 1.
\end{aligned}$$

Solución del Problema 3. Observemos que $2021 < 5^5 = 3125$. Entonces, los números que queremos contar los podemos dividir en cinco grupos.
a) Aquellos que no son divisibles por 5. De estos hay 10 números: $2, 2^2, \ldots, 2^{10}$.
b) Aquellos que son divisibles por 5 pero no son divisibles por 5^2. De estos hay 9 números: $5, 5 \times 2, 5 \times 2^2, \ldots, 5 \times 2^8 = 1280$.
c) Aquellos que son divisibles por 5^2 pero no son divisibles por 5^3. De estos hay 7 números: $5^2, 5^2 \times 2, 5^2 \times 2^2, \ldots, 5^2 \times 2^6 = 1600$.
d) Aquellos que son divisibles por 5^3 pero no son divisibles por 5^4. De estos hay 5 números: $5^3, 5^3 \times 2, 5^3 \times 2^2, 5^3 \times 2^3, 5^3 \times 2^4 = 2000$.
e) Aquellos que son divisibles por 5^4 pero no son divisibles por 5^5. De estos hay 2 números: 5^4 y $5^4 \times 2 = 1250$.
Por lo tanto, en total son $10 + 9 + 7 + 5 + 2 = 33$ números.

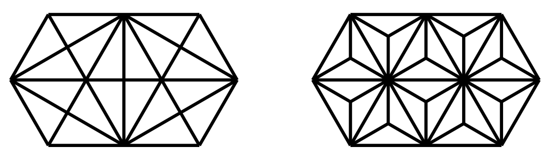
Solución del Problema 4. La respuesta es 6. Supongamos que los números que han sido escritos son $1, \ldots, n$ y que el número que se borró es k. Por la condición del problema, tenemos que $\frac{(1+2+\cdots+n)-k}{n-1} = \frac{n(n+1)-2k}{2(n-1)} = \frac{45}{4}$.
Si $k = 1$, entonces $\frac{n(n+1)-2}{n-1} = \frac{n^2+n-2}{n-1} = \frac{(n-1)(n+2)}{n-1} = n + 2 \geq \frac{45}{2}$, de donde $n \geq \frac{45}{2} - 2 = 20.5$.
Si $k = n$, entonces $\frac{n(n+1)-2n}{n-1} = \frac{n^2-n}{n-1} = \frac{n(n-1)}{n-1} = n \leq \frac{45}{2}$, de donde $n \leq 22.5$.
Como n es un número entero, tenemos que $21 \leq n \leq 22$, esto es, $n = 21$ o 22.
Si $n = 21$, entonces $\frac{21\times 22-2k}{40} = \frac{45}{4}$, de donde $k = 6$.
Si $n = 22$, entonces $\frac{22\times 23-2k}{42} = \frac{45}{4}$, de donde $k = \frac{67}{4}$, que no es un entero.

Solución alternativa. El promedio de los números es $\frac{45}{4} > \frac{22}{2} = \frac{21+1}{2}$. Esto implica que el número más grande es al menos 21. Si este número más grande es 21, entonces la suma de los veinte números que quedan es $\frac{45}{4} \times 20 = 225$. Luego, el número borrado es $(1 + 2 + \cdots + 21) - 225 = 6$. Ahora, para que la suma de los restantes números sea un entero, el siguiente valor posible para el número más grande es 25 y la suma de los veinticuatro números restantes es $\frac{45}{4} \times 24 = 270$ y el número borrado tendría que ser $(1 + 2 + \cdots + 25) - 270 = 55$, lo cual es un absurdo ya que el número más grande es 25. Por lo tanto, los números son $1, 2, \ldots, 21$ y el número borrado es 6.

Solución del Problema 5. Un triángulo con las propiedades deseadas debe enlosar el plano por medio de reflexiones. Entonces tal teselación debe tener simetría rotacional de 4 o 6 dobleces, por lo que su base debe ser ya sea un teselado con cuadrados o un teselado con triángulos equiláteros. En el primer caso, un triángulo debe tener ángulos $45° - 45° - 90°$, como se muestra en el diagrama izquierdo de la figura de abajo. En el segundo caso, el triángulo debe tener todos sus ángulos iguales a $60°$, como se muestra en el diagrama de abajo a la derecha.



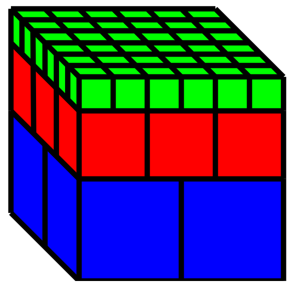
Sin embargo, un triángulo equilátero puede ser partido en dos o tres triángulos congruentes, con al menos uno de los lados coincidiendo con un lado del triángulo equilátero. Estos triángulos tienen ángulos $30° - 60° - 90°$ o ángulos $30° - 30° - 120°$. Los teselados resultantes se muestran a continuación.



Por lo tanto, hay cuatro posibles triángulos que cumplen, y los ángulos interiores de estos triángulos son $(45°, 45°, 90°)$, $(60°, 60°, 60°)$, $(30°, 60°, 90°)$, $(30°, 30°, 120°)$ y sus permutaciones.

Solución del Problema 6. Un cubo de lado 1 cm es el más pequeño.
a) Si se corta un cubo de lado 5 cm, los restantes cubos son de lado 1 cm de los cuales habrá $6^3 - 5^3 = 91$, lo cual es mayor que 48. Luego, no hay cubos de lado 5 cm.
b) Si se corta un cubo de lado 4 cm, los restantes cubos son de lado 2 cm o de lado 1 cm. Si usamos cubos de lado 1 cm, tenemos $6^3 - 4^3 = 152$ de estos, lo cual no puede ser. Si usamos x cubos de lado 2 cm, entonces usamos $152 - 8x$ cubos de lado 1 cm. Luego, $x + 152 - 8x = 152 - 7x = 48$, de donde $x = \frac{104}{7}$ que no es un entero. Por lo tanto, no hay cubos de lado 4 cm.
c) Supongamos que usamos a cubos de lado 1 cm, b cubos de lado 2 cm y c cubos de lado 3 cm. Entonces, tenemos que $a + b + c = 49$ y $a + 8b + 27c = 216$. Restando estas ecuaciones, obtenemos que $7b + 26c = 167$, de donde se sigue que $c \leq 6$.
Si $c = 0$, entonces $7b = 167$ y b no es entero.
Si $c = 1$, entonces $7b = 141$ y b no es entero.
Si $c = 2$, entonces $7b = 115$ y b no es entero.
Si $c = 3$, entonces $7b = 89$ y b no es entero.
Si $c = 4$, entonces $7b = 63$ y $b = 9$.
Si $c = 5$, entonces $7b = 37$ y b no es entero.
Si $c = 6$, entonces $7b = 11$ y b no es entero.
Por lo tanto, $c = 4$, $b = 9$ y $a = 49 - 4 - 9 = 36$.

Falta ver que estos números funcionan. Para esto, pongamos los cuatro cubos de lado 3 cm en las primeras tres capas, los nueve cubos de lado 2 cm en la cuarta y quinta capa y los 36 cubos de lado 1 cm en la capa superior.



Solución del Problema 7. El número total de frutas es un múltiplo de $4 + 7 = 11$. Después de que Satya se ha comido 20 de ellas, el número total de frutas es un múltiplo de $5 + 8 = 13$. Los múltiplos de 11 entre 100 y 300 son 110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198, 209, 220, 231, 242, 253, 264, 275, 286 y 297. Restando 20, obtenemos 90, 101, 112, 123, 134, 145 y $156 = 13 \times 12$. Si continuamos esta secuencia, el siguiente múltiplo de 13 es $156 + 11 \times 13 = 299$, pero $299 + 20 = 319$ es mayor que 300. Por lo tanto, Satya tiene $156 + 20 = 176$ frutas inicialmente.

Solución alternativa. Supongamos que el número total de frutas es $11a$ y que el número total de manzanas comidas en 10 días es m. Entonces, tenemos que

$$\frac{7a - m}{4a - (20 - m)} = \frac{8}{5}.$$

Despejando el valor de a, obtenemos que $a = 4m - 53 + \frac{m-1}{3}$. Como $0 \leq m \leq 20$, resulta que $0 \leq \frac{m-1}{3} \leq \frac{20-1}{3} < 7$. Luego,

$$a = 4m - 53 + \frac{m-1}{3} < 4m - 53 + 7 = 4m - 46.$$

Como $11a > 100$, necesariamente $a > 9$ y, por ende, $13 < m \leq 20$. Como $\frac{m-1}{3}$ es un entero, es fácil ver que las únicas posibilidades son $m = 16$ o 19.
Si $m = 16$, entonces $a = 4m - 53 + \frac{m-1}{3} = 4 \times 16 - 53 + 5 = 16$ y $11a = 176$.
Si $m = 19$, entonces $a = 4m - 53 + \frac{m-1}{3} = 4 \times 19 - 53 + 6 = 29$ y $11a = 319$, lo cual no puede ser (ya que $319 > 300$).
Por lo tanto, Satya tiene 176 frutas inicialmente.

Solución del Problema 8. Sea $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5b_1b_2b_3b_4b_5}$ uno de tales números. Tenemos que $a_1 \neq 0$. Más aún, $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ es una permutación de $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$. Luego, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$. Como 45 es múltiplo de 9, A también lo es. Ahora, como 9 y 11111 son primos relativos y A es múltiplo de 9 y 11111, resulta que A es múltiplo de $9 \times 11111 = 99999$. Si $a = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ y $b = \overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$, entonces

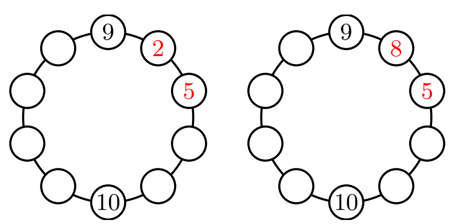
$$A = a \times 10^5 + b = 99999a + (a + b).$$

Como A es múltiplo de 99999, $a+b$ también lo es y, como $0 < a+b < 99999 + 99999 = 2(99999)$, la única posibilidad es $a+b = 99999$. Por lo tanto, $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = a_4 + b_4 = a_5 + b_5 = 9$.
A partir de los diez dígitos $0, 1, 2, \ldots, 9$ hay 5 parejas de dígitos que satisfacen que $a_k + b_k = 9$, las cuales son $(0, 9)$, $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$ y $(4, 5)$. Hay $5!$ maneras de permutar estas parejas para cada $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y hay 2 maneras de permutar los dígitos en (a_k, b_k), dando un total de $5! \times 2^5$ enteros distintos. Por otro lado, como el papel de cada dígito $0, 1, 2, \ldots, 9$ es idéntico, el número de estos enteros cuyo primer dígito es 0 es igual a $\frac{5!\times 2^5}{10} = 4! \times 2^4$.
Por lo tanto, el número de tales enteros A es igual a $5! \times 2^5 - 4! \times 2^4 = 3456$.

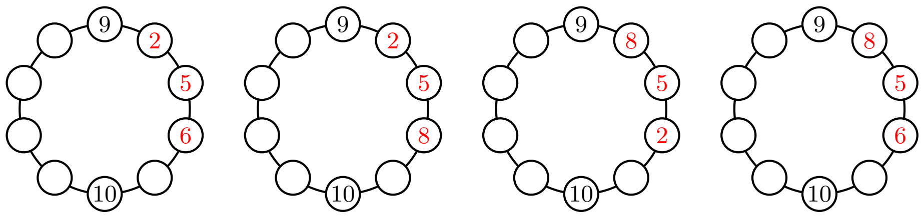
Solución del Problema 9. Se tienen que alternar números pares e impares; si no es así, habrá una suma de números adyacentes que será igual a un número par mayor a 2 (que no será primo). En la siguiente tabla, se muestran las posibles sumas de pares e impares. Las que están marcadas con un "$\circ$" son iguales a un número primo, mientras que las que están marcadas con un "$\times$" no son un número primo.

$1+2=3\,(\circ)$	$3+4=7\,(\circ)$	$5+6=11\,(\circ)$	$7+8=15\,(\times)$
$3+2=5\,(\circ)$	$5+4=9\,(\times)$	$7+6=13\,(\circ)$	$9+8=17\,(\circ)$
$5+2=7\,(\circ)$	$7+4=11\,(\circ)$	$9+6=15\,(\times)$	$1+10=11\,(\circ)$
$7+2=9\,(\times)$	$9+4=13\,(\circ)$	$1+8=9\,(\times)$	$3+10=13\,(\circ)$
$9+2=11\,(\circ)$	$1+6=7\,(\circ)$	$3+8=11\,(\circ)$	$5+10=15\,(\times)$
$1+4=5\,(\circ)$	$3+6=9\,(\times)$	$5+8=13\,(\circ)$	$7+10=17\,(\circ)$
			$9+10=19\,(\circ)$

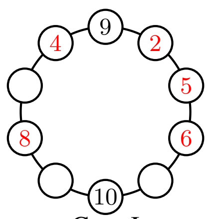
Como $5 + 10 = 15$ no es un número primo, entonces no se puede poner 5 adyacente a 10. Esto significa que, salvo reflexiones, se puede tomar $C = 5$. Observamos que los únicos números que se pueden poner entre 5 y 9 son 2 y 8. Estas dos posibilidades se muestran a continuación.

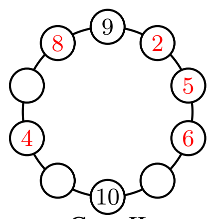


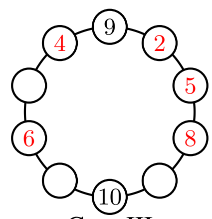
Luego, 5 puede ser adyacente a 2, 6 u 8. Luego, estos dos casos anteriores se pueden extender a las siguientes cuatro posibilidades.

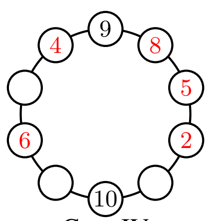


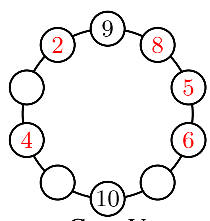
Tomando en cuenta que $9+6=15$ no es un número primo, se tiene que 6 no puede ser adyacente a 9. Luego, las cuatro posibilidades anteriores se extienden a las siguientes seis posibilidades.

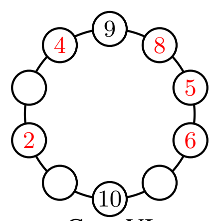

Caso I


Caso II


Caso III


Caso IV

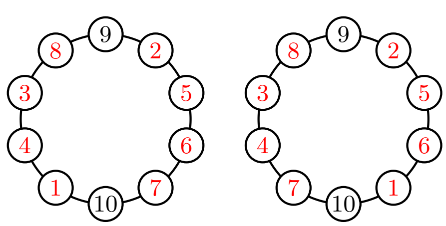

Caso V


Caso VI

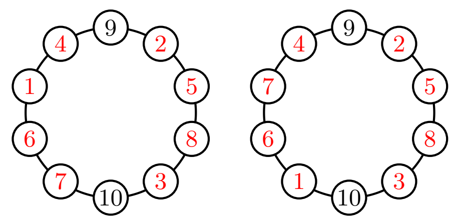
Los dígitos restantes son 1, 3 y 7. De aquí se analiza cada caso.

I) Como $1+8=9$ no es un número primo, no se puede colocar 1 adyacente al 8. Como $7+8=15$ no es un número primo, no se puede colocar el 7 adyacente al 8. Esto significa que 1 y 7 deben ser colocados en el mismo círculo, lo cual es imposible.

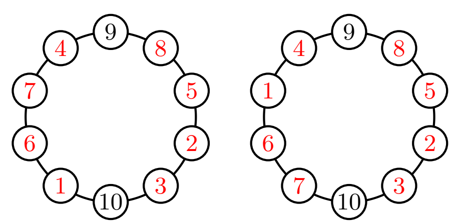
II) Se sabe que ni 1 ni 7 pueden estar adyacentes a 8. Luego, el círculo que está entre 4 y 8 debe contener al 3. Para las demás posiciones, se pueden intercambiar 1 y 7. Con esto se cumplen las condiciones del problema. Los posibles diagramas se muestran a continuación.



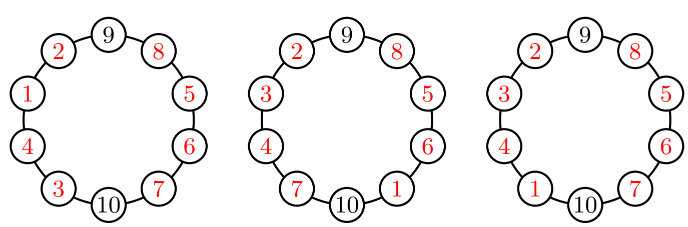
III) Se sabe que tanto 1 como 7 no pueden ser adyacentes a 8. Luego, el círculo entre 8 y 10 debe contener al 3. Para las demás posiciones, se pueden intercambiar el 1 y el 7. Con esto se cumplen las condiciones del problema. Los posibles diagramas se muestran a continuación.



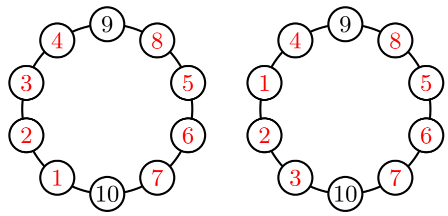
IV) Como $3 + 6 = 9$ no es un número primo, no se puede colocar 3 enseguida del 6. Luego, el círculo entre 2 y 10 contiene al 3. Para las demás posiciones, se puede intercambiar entre 1 y 7. En ambas opciones se cumplen las condiciones del problema. A continuación se muestran los posibles diagramas.



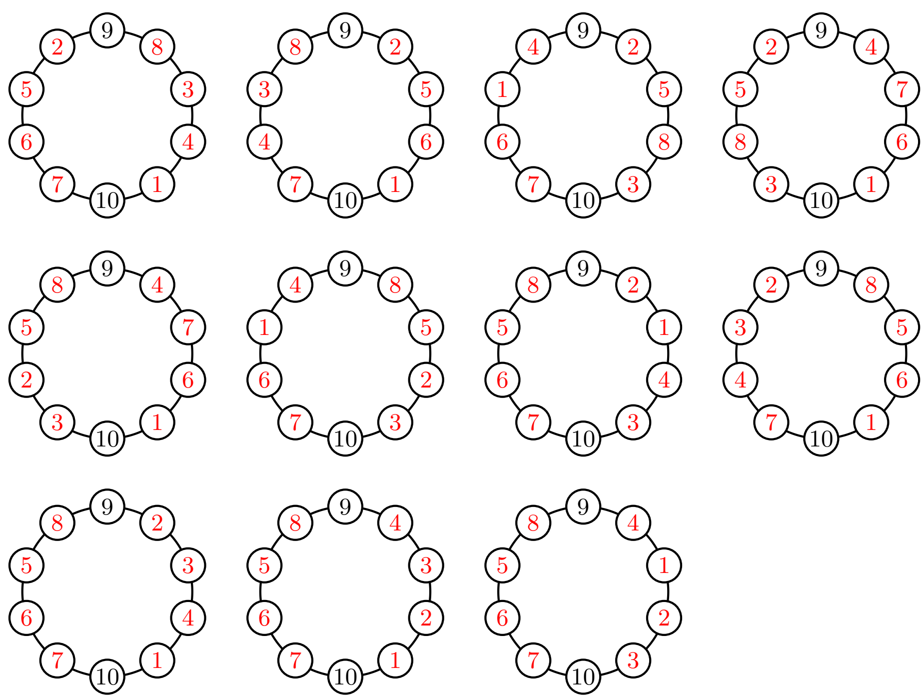
V) Como $3 + 6 = 9$ no es un número primo, no se puede colocar 3 enseguida del 6. Análogamente, como $7 + 2 = 9$ no es un número primo, no se puede colocar el 7 adyacente al 2. Así, de las seis formas de colocar los números restantes, hay tres de ellas que alcanzan las condiciones del problema. Estas se muestran a continuación.



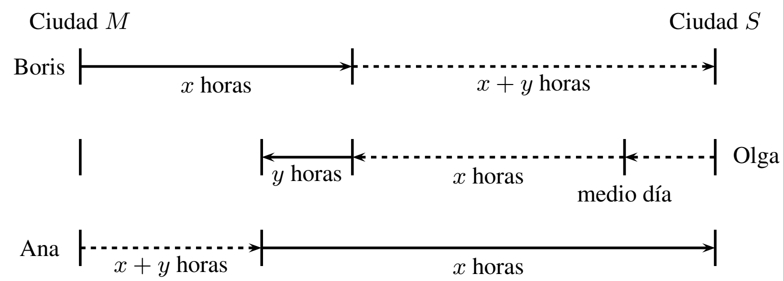
VI) Como $7+2 = 9$ no es un número primo, no se puede colocar el 7 enseguida del 2. Luego 7 debe colocarse en el círculo que se encuentra entre el 6 y el 10. Para las demás posiciones, se pueden colocar 1 y 3 en cualquier orden y se cumplirán las condiciones del problema. Los posibles diagramas se muestran a continuación.



Por lo tanto, hay 11 posibles diagramas teniendo $C = 5$, dando en total 22 diagramas por la simetría de la figura. Sin embargo, de cada pareja de diagramas tales que uno es el reflejo del otro, exactamente uno de ellos cumple que el número en G es mayor al número en E, dando así 11 diagramas en total. Estos se muestran en la siguiente figura.

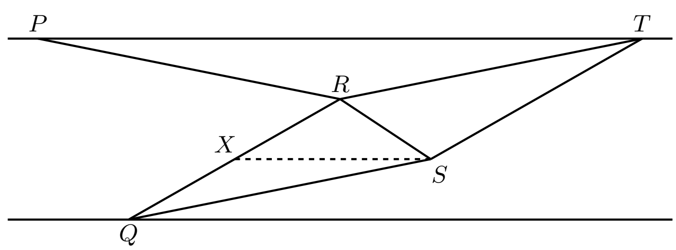


Solución del Problema 10. Supongamos que Boris pasa en bici x horas después de Olga y que Olga pasa a Ana después de otras y horas. Para que Ana y Boris lleguen al mismo tiempo a la ciudad S, Ana debe andar en bici por otras x horas. En el dibujo, la línea punteada representa la ruta a pie y la línea continua representa la ruta en bici.



Cada uno de Ana y Boris camina por $x+y$ horas. Luego, tenemos que $15x+6(x+y)=15$, esto es, $7x+2y=5$.
Además, los 15 km son cubiertos por Ana y Boris caminando mientras que Olga va en bici. Luego, $6(x+y)+15y+6(x+y)=15$, esto es, $4x+9y=5$.
Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos que $x=7/11$ y $y=3/11$. Como Boris y Olga caminaron en la misma ruta, Olga debió salir de la ciudad S, $y=3/11$ de hora antes de medio día.
Otra forma de concluir: Boris estuvo andando en bici $\frac{7}{11}\times 15=\frac{105}{11}$ km y Olga caminó $15-\frac{105}{11}=\frac{60}{11}$ km. Se necesitan $\frac{60}{11}\times\frac{1}{6}=\frac{10}{11}$ de hora para Olga. Esto significa que debió comenzar a caminar a las $12\frac{7}{11}-\frac{10}{11}=11\frac{8}{11}$ horas, esto es, $\frac{3}{11}$ de hora antes de medio día.

Solución alternativa. En el siguiente dibujo, el eje horizontal representa el tiempo con Q en el medio día, mientras que el eje vertical representa la distancia desde la ciudad S (arriba) hasta la ciudad M (abajo). La ruta de Ana es $QS+ST$, la ruta de Boris es $QR+RT$ y la ruta de Olga es $PR+RS$. Tenemos que $PR=QS=RT$ son cubiertos a pie mientras que $QR=ST$ y RS son cubiertos en bici. Sea X el punto en QR tal que $RX=RS$.



Denotemos por $t(I,J)$ a la diferencia de tiempo en I y en J. Suponiendo que $t(Q,X)=4$ unidades, entonces $\frac{t(Q,S)}{t(Q,X)}=\frac{5}{2}$ es la razón de las velocidades. Luego, $t(Q,S)=10$ unidades.
Como $t(X,R)=t(R,S)$, cada uno es igual a $\frac{10-4}{2}=3$ unidades. Se sigue que $t(Q,R)=7$ unidades y $t(P,R)=t(Q,S)=10$ unidades. Por lo tanto, $t(P,Q)=3$ unidades. Ahora, Ana camina a 6 km/hr durante 10 unidades y anda en bici a 15 km/hr

durante 7 unidades y, $6 \times 10 + 15 \times 7 = 165$. Como la distancia entre la ciudad M y la ciudad S es de 15 km, cada unidad de tiempo es igual a $\frac{15}{165} = \frac{1}{11}$ de hora. Por lo tanto, Olga dejó la ciudad S $\frac{3}{11}$ de hora antes de medio día.

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2022, No. 1

5^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 17 al 21 de junio de 2021 se llevó a cabo de manera virtual, el Concurso Nacional de la 5^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Participaron 117 estudiantes de primaria, representando a 29 entidades federativas y, 149 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

En esta ocasión, los ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos del Nivel II, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas

(IMC), a celebrarse en el verano de 2022.

Los alumnos ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos del Nivel II de la 5^a OMMEB son los siguientes.

Nombre	**Estado**	**Medalla**
Luis Veudi Vivas Pérez	Quintana Roo	Oro individual
Emiliano Hernández Barranco	Morelos	Oro individual
Sebastián Montemayor Trujillo	Nuevo León	Oro individual
Andrea Sarahí Cascante Duarte	Morelos	Oro individual
Javier Caram Quirós	Ciudad de México	Oro individual
Antonio Gutiérrez Meléndez	Coahuila	Oro individual
Rodrigo Saldívar Mauricio	Zacatecas	Oro individual
Leonardo Melga Rubí	Morelos	Oro por equipos

En la prueba por equipos en el Nivel II, el Estado de Morelos obtuvo el primer lugar (con 240 puntos), el Estado de Zacatecas obtuvo el segundo lugar (con 197 puntos) y el Estado de Nuevo León obtuvo el tercer lugar (con 194 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel II fueron:
Primer lugar: Morelos (con 542 puntos).
Segundo lugar: Zacatecas (con 418 puntos).
Tercer lugar: Nuevo León (con 377 puntos).

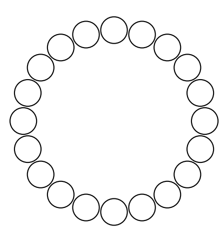
A continuación presentamos los problemas y soluciones de los exámenes individual y por equipos del Nivel II de la 5^a OMMEB.

Prueba Individual, Nivel II

Parte A

1) En una olimpiada participan cinco hermanos: Saúl, César, Luis, Aldo y Rodrigo. Sus edades son $12, 13, 14, 17$ y 25 años, pero no se sabe quién tiene cada edad. Si se suma la edad de Saúl con la de César se obtiene la edad de Luis. Si se suma la edad de Saúl con la de Aldo se obtiene el doble de la edad de César. ¿Cuántos años tiene Rodrigo?

2) Diana escribe un número en cada círculo de manera que la suma de los números en los 12 círculos es 162.

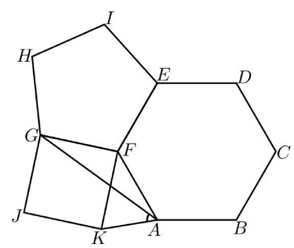


Alexandra llega y borra cada número, y en su lugar escribe la suma de los dos números que estaban junto al que borró. ¿Cuánto vale la suma de los 12 números que escribe Alexandra?

3) ¿Cuántos números de siete cifras cumplen que el producto de sus cifras es 3645 y la suma de sus cifras no es un número primo?

4) Isaac escribe en orden alfabético todas las palabras de 5 letras que se pueden formar con las letras O, M, M, E y B. Así, la palabra que está en la posición 1 es $BEMMO$, la que queda en la posición 2 es $BEMOM$ y así sucesivamente. ¿En qué número de posición se encuentra la palabra $OMMEB$?

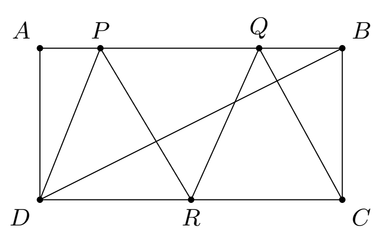
5) La siguiente figura muestra un hexágono regular cuyos vértices son A, B, C, D, E, F, un pentágono regular cuyos vértices son E, F, G, H, I, y un cuadrado cuyos vértices son F, G, J, K. ¿Cuántos grados mide el ángulo $\angle KAG$?



6) Obtén la suma de todos los números que tienen exactamente un múltiplo en cada una de las 5 columnas de la tabla siguiente.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35

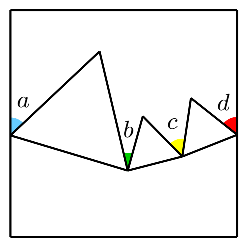
7) En el rectángulo $ABCD$ se tienen los puntos P y Q en el lado AB, y el punto R en el lado CD. Se sabe que los triángulos DPR y RQC tiene área igual a 10 cm^2, y que $2BC = DC$. Calcula, en cm, la longitud del segmento DB.



8) Un triángulo rectángulo tiene sus vértices sobre una circunferencia de radio 5. El área dentro del círculo que está afuera del triángulo es $25\pi - 24$. Encuentra la suma de las medidas de los catetos del triángulo.

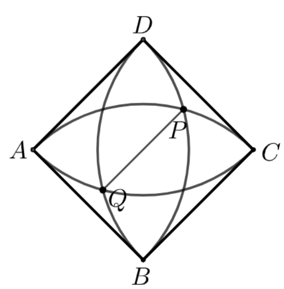
9) ¿Cuántos números de 3 cifras distintas son múltiplos de 5 y tienen sus cifras en orden decreciente (es decir, la cifra de las centenas es mayor que la de las decenas y la de las decenas es mayor que la de las unidades)?

10) En el interior de un cuadrado hay tres triángulos equiláteros como se muestra en la figura. Si la suma de los ángulos a y b es $50°$, ¿cuál es el valor de la suma, en grados, de los ángulos c y d?



11) El entero positivo m cumple que divide a tres millones y a cuatro millones. También cumple que es múltiplo de 40 y 125. ¿Cuántos valores posibles hay para el entero m?

12) En la figura, $ABCD$ es un cuadrado de lado 1 cm y los cuartos de círculo tienen centros en A, B, C y D. ¿Cuál es la longitud, en cm, de PQ?



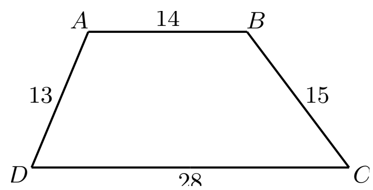
Parte B

13) ¿Cuántos números enteros positivos de 5 cifras (es decir, la primera cifra de izquierda a derecha es distinta de cero) hay tales que al sumar sus cifras se obtiene un divisor del número 2021?

14) Se tiene un cubo con sus caras pintadas de 6 colores distintos, una de cada color. Cada cara se separa en 4 cuadrados iguales trazando líneas perpendiculares a sus

lados que pasen por sus centros. En los 24 cuadrados que resultan de la división, se acomodan los números del 1 al 24 de manera que después de colocarlos todos, la suma de cada 3 números cuyos cuadrados tienen un vértice en común y este sea un vértice del cubo sea múltiplo de 3 y, además, cada dos números cuyos cuadrados estén en la misma cara del cubo y estos compartan un lado sumen también un múltiplo de 3. ¿De cuántas formas es posible realizar este acomodo?

15) Sea $ABCD$ un trapecio con AB paralela a CD, $AB = 14$ cm, $BC = 15$ cm, $CD = 28$ cm y $DA = 13$ cm. Encuentra el área, en cm^2, de $ABCD$.



Prueba por Equipos, Nivel II

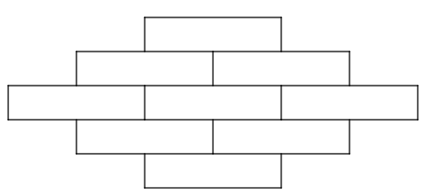
1) Un número de 5 dígitos $\overline{abcde}$ es *fósil* si cumple las siguientes condiciones:

- El número $\overline{ab}$ es múltiplo de 2.
- El número $\overline{abc}$ es múltiplo de 3.
- El número $\overline{abcd}$ es múltiplo de 4.
- El número $\overline{abcde}$ es múltiplo de 5.

Por ejemplo, el número 50165 es fósil porque 50 es múltiplo de 2, 501 es múltiplo de 3, 5016 es múltiplo de 4 y 50165 es múltiplo de 5. ¿Cuántos números fósiles hay?

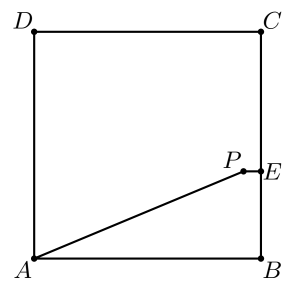
2) En el triángulo ABC, se tiene que $\angle ACB = 90°$, $AC = 12$ cm y $BC = 9$ cm. Sea D un punto sobre la hipotenusa AB tal que $AD = 5$ cm. Encuentra el valor de CD^2.

3) La siguiente figura consiste de 9 rectángulos. ¿De cuántas formas se pueden pintar los rectángulos si se dispone de 4 colores distintos y se quiere que no queden pintados del mismo color dos rectángulos vecinos?



4) Considera todos los números enteros positivos de 7 dígitos que se forman con los dígitos 1, 2 y 3 de manera que el 3 aparezca exactamente 2 veces. ¿Cuántos de tales enteros son divisibles entre 11?

5) El lado de un cuadrado $ABCD$ mide 13 cm. El punto P está dentro del cuadrado y E es un punto sobre el lado BC tal que PE es perpendicular a CB y los segmentos PE y PA miden 1 cm y 13 cm, respectivamente. ¿Cuál es el área, en cm^2, del triángulo PCD?



6) Encuentra el mayor entero positivo n tal que 7^n divide a

$$49 \cdot 1 \cdot 1! + 49 \cdot 2 \cdot 2! + 49 \cdot 3 \cdot 3! + \cdots + 49 \cdot 49 \cdot 49!.$$

(NOTA: Si n es un entero positivo, entonces $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. Por ejemplo, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$).

7) Ángel escribe en un pizarrón exactamente una vez cada uno de los números de la forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 8$. Por ejemplo, uno de esos números que escribe es $-1+2-3+4-5+6+7+8 = 18$. Determina la cantidad de números positivos que escribe Ángel.
NOTA: *si más de una expresión de la forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 8$ da el mismo resultado positivo, entonces ese resultado se cuenta tantas veces como la cantidad de expresiones que dan dicho resultado.*

8) Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A y sea Γ su circuncírculo, es decir, la circunferencia que pasa por los vértices A, B y C. La altura desde A corta a Γ en E y sea M el punto medio del arco $\widehat{BC}$ que no contiene a A, es decir, M está sobre la circunferencia, entre B y C, tal que las longitudes de los arcos $\widehat{BM}$ y $\widehat{MC}$ son iguales, y A no está en los arcos $\widehat{BM}$ y $\widehat{MC}$. EM corta a BC en J. Demuestra que
$$\frac{JE}{JM} = \frac{AE}{BC}.$$

Soluciones de la Prueba Individual, Nivel II

1) La respuesta es 17. La menor suma de dos edades es $12 + 13 = 25$, por lo que 12 y 13 son las edades de Saúl y César y, la edad de Luis, es 25. Si la edad de César

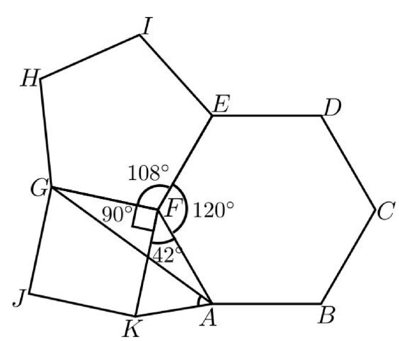
fuera 12, entonces el doble, 24, sería la suma de las edades de Saúl y Aldo. Como ninguna pareja de edades suma 24, concluimos que la edad de César es 13 y la edad de Saúl es 12. El doble de 13 es 26 y $26 = 12 + 14$. De aquí que la edad de Aldo es 14 y, por consiguiente, Rodrigo tiene 17 años.

2) La respuesta es 384. Cada número que escribe Diana va a formar parte de dos números que escribe Alexandra, ya que cada número se reemplaza por la suma de los dos números que tiene al lado. Entonces, la suma de los 20 números que escribe Alexandra es el doble de la suma de los 20 números que escribe Diana, esto es, es igual a $192 \times 2 = 384$.

3) La respuesta es 350. Tenemos que $3645 = 3^6 \cdot 5$. Analicemos la suma de todas las posibilidades de cifras.
Si las cifras son $3, 3, 3, 3, 3, 3, 5$, entonces la suma es 23, que es número primo.
Si las cifras son $9, 3, 3, 3, 3, 5, 1$, la suma es 27. En este caso, hay $\frac{7!}{4!} = 210$ números, puesto que hay $7!$ permutaciones de las cifras pero hay que dividir entre $4!$ pues hay 4 cifras iguales a 3 y sus permutaciones son indistinguibles.
Si las cifras son $9, 9, 3, 3, 5, 1, 1$, la suma es 31, que es un número primo.
Si las cifras son $9, 9, 9, 5, 1, 1, 1$, la suma es 35. En este caso hay $\frac{7!}{3!3!} = 140$ números.
Por lo tanto, en total son $210 + 140 = 350$ números.

4) La respuesta es 60. La palabra OMMEB es precisamente la última en el orden alfabético, por lo que necesitamos contar el número de palabras diferentes que se pueden formar. Basta permutar las cinco letras que hay y dividir entre 2 por la repetición de la letra M. El resultado es $\frac{5!}{2} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{2} = 60$.

5) La respuesta es $45°$. Los ángulos internos de un cuadrado miden $90°$, los ángulos internos de un pentágono regular miden $\frac{180° \times 3}{5} = 108°$ y los ángulos internos de un hexágono regular miden $\frac{180° \times 4}{6} = 120°$.



Entonces, tenemos que $\angle KFA = 360° - 120° - 108° - 90° = 42°$. Como $FK = FA$, el triángulo FKA es isósceles y, por consiguiente, $\angle KAF = \frac{180° - 42°}{2} = 69°$.

Por otro lado, como $GF = FA$, el triángulo GFA también es isósceles, lo cual implica que

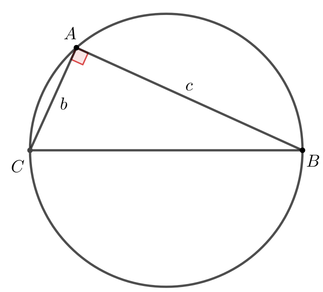
$$\angle GAF = \frac{180^\circ - \angle GFA}{2} = \frac{180^\circ - GFK - \angle KFA}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ - 42^\circ}{2} = 24^\circ.$$

Por lo tanto, tenemos que $\angle KAG = \angle KAF - \angle GAF = 69^\circ - 24^\circ = 45^\circ$.

6) La respuesta es 13. Basta revisar los números del 1 al 7, pues el quinto múltiplo de un número mayor que 7 es mayor que $5 \times 7 = 35$ y la tabla contiene los números del 1 al 35. Se pueden descartar fácilmente los números del 1 al 5 porque, por ejemplo, los múltiplos de 3 aparecen cada 3 números y hay 5 columnas. Comprobamos que 6 y 7 sí cumplen, así que la suma buscada es $6 + 7 = 13$.

7) La respuesta es 40. Si juntamos las bases DR y RC de los triángulos PDR y QRC, obtenemos el lado DC del rectángulo $ABCD$ y, el otro lado BC, es la altura de los dos triángulos. Luego, la suma de las áreas de los triángulos PDR y QRC es la mitad del área del rectángulo $ABCD$. Entonces, el área del rectángulo $ABCD$ es igual a $2(7 + 13) = 40$.

8) La respuesta es 14. Considerando la siguiente figura, debemos determinar el valor de $b + c$.



Como el triángulo ABC es rectángulo, BC es un diámetro del círculo y, por consiguiente, $BC = 10$. El área que está fuera del triángulo, la podemos calcular restándole al área del círculo, el área del triángulo. Entonces, tenemos que

$$25\pi - 24 = 25\pi - \frac{bc}{2}.$$

De aquí, obtenemos que $bc = 48$. Por otra parte, por el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC, tenemos que $b^2 + c^2 = BC^2 = 100$ y, por lo tanto,

$$(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 = 100 + 2 \cdot 48 = 196 = 14^2,$$

de donde se sigue que $b + c = 14$.

9) La respuesta es 42. Tenemos dos posibilidades para el dígito de las unidades: 0 o 5. Si es 0, los otros dos dígitos deben elegirse entre el 1 y el 9 y luego ordenarse de mayor a menor, así que hay $\binom{9}{2} = 36$ posibilidades.
Si es 5, entonces los otros dos dígitos deben elegirse entre los números del 6 al 9, de manera que hay $\binom{4}{2} = 6$ posibilidades.
En total, son $36 + 6 = 42$ números.

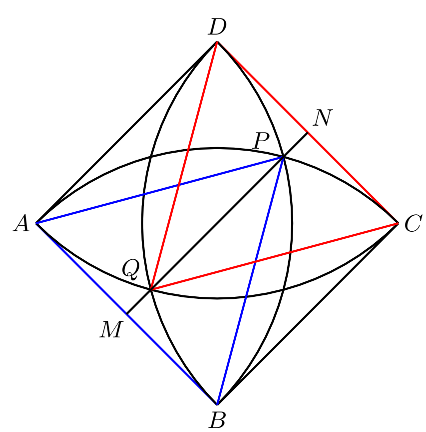
10) La respuesta es $130°$. Consideremos el hexágono formado por los dos vértices superiores del cuadrado y los cuatro vértices en los que están los ángulos marcados. La suma de los ángulos internos de este hexágono es igual a $4(180°)$. Sin embargo, esta misma suma se puede expresar como la suma de los 2 ángulos rectos en los vértices del cuadrado, de los 6 ángulos de $60°$ en los triángulos equiláteros y de los ángulos marcados. Es decir, si S es la suma de ángulos buscada, entonces

$$2\,(90°) + 3\,(120°) + S + 50° = 4\,(180°)\,,$$

de donde obtenemos que $S = 130°$.

11) La respuesta es 16. Notemos que el máximo común divisor de tres millones y cuatro millones es 10^6 y el mínimo común múltiplo de 40 y 125 es 10^3. Por las condiciones del problema, existe un entero k tal que $m = 1000k$. Como m debe dividir a 10^6, entonces k debe dividir a 10^3. Para cada divisor positivo de $10^3 = 2^3 \cdot 5^3$ obtenemos un entero m que cumple. Por lo tanto, hay $(3 + 1)(3 + 1) = 16$ valores para m.

12) La respuesta es $\sqrt{3} - 1 \approx 0.73$ cm. Sean M el punto medio de AB y N el punto medio de CD.



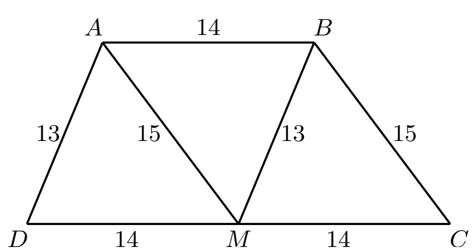
Tenemos que ABP es un triángulo equilátero de lado 1 cm, así que $PM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm, por ser una altura. Luego, $NP = 1 - PM = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. De manera similar, tenemos que $QN = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Por lo tanto, $PQ = 1 - QM - NP = 1 - (2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1 \approx 0.73$ cm.

Parte B

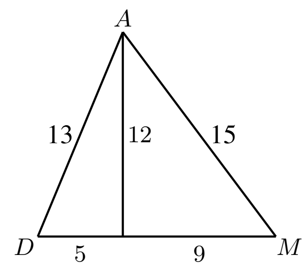
13) Los divisores positivos del número 2021 son 1, 43, 47 y 2021. La mayor suma de dígitos que se puede obtener con un número entero de 5 cifras es 45, por lo que se descartan las posibilidades de obtener una suma igual a 47 o una suma igual a 2021. Para obtener una suma de 43, se requieren tres números 9 y dos números 8, o bien, cuatro números 9 y un número 7. El número de permutaciones posibles con $\{9, 9, 9, 8, 8\}$ es igual a 10, mientras que el número de permutaciones posibles con $\{9, 9, 9, 9, 7\}$ es 5. Esto significa que hay $10 + 5 = 15$ números enteros positivos de 5 cifras que al sumar sus cifras se obtiene 43. Para obtener una suma de 1 solamente hay un caso y es el número 10000. Por lo tanto, hay 16 números enteros positivos de 5 cifras que al sumar sus cifras se obtiene un divisor del número 2021.

14) Analizando una esquina, podemos observar que tres cuadros que comparten una esquina deben tener números que tengan todos sus residuos módulo 3 iguales o todos distintos. De analizar las caras del cubo, notamos que al saber el residuo módulo 3 de un número en algún cuadro, las congruencias de sus vecinos quedan determinadas (al haber un único residuo que sume 0 con el del cuadro), determinando así las congruencias de toda su cara.
Si tomamos una cara con una casilla que tiene un número divisible por 3, todos los números en esa cara serán divisibles por 3 y ninguna de las caras vecinas a esta pueden tener un múltiplo de 3, puesto que las esquinas que comparten indicarían que las otras dos caras adyacentes a ambas tienen todas sus caras con múltiplos de 3, a pesar de solo haber 8 múltiplos de 3 entre 1 y 24. Así, los múltiplos de 3 estarán en dos caras opuestas y cada una de las demás caras tendrá en un patrón de ajedrez números congruentes a 1 o 2 módulo 3.
Hay 3 formas de elegir las dos caras opuestas que tendrán a los múltiplos de 3, luego 2 formas de escoger el patrón de ajedrez de números congruentes a i módulo 3 para cada $i \in \{0, 1, 2\}$. Esto resulta en un total de $6 \times (8!)^3$ acomodos posibles.

15) Sea M el punto medio de CD. Tenemos que $DM = MC = 14 = AB$, lo cual implica que $ABMD$ es un paralelogramo con $AM = BC = 15$ y $BM = AD = 13$. Por lo que el área de $ABCD$ es el triple del área de un triángulo de lados 13, 14 y 15.

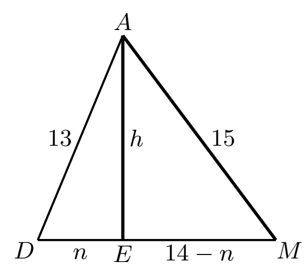


Como ese triángulo se puede construir con dos triángulos de lados 13, 12, 5 y 15, 12, 9, tiene altura 12 y área 84.



Por lo tanto, el área de $ABCD$ es igual a $84 \times 3 = 252$.

Solución alternativa. Consideremos el triángulo ADM y tracemos su altura AE desde el vértice A y sean $h = AE$, $n = DE$ y $EM = 14 - n$ como se muestra en la figura.



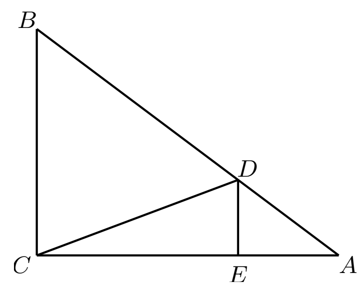
Entonces, por el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos AED y AEM, tenemos que $13^2 - n^2 = h^2 = 15^2 - (14-n)^2$, de donde $(14-n)^2 - n^2 = 15^2 - 13^2$, esto es, $14^2 - 28n = (15+13)(15-13) = 28(2)$. De aquí, obtenemos que $28n = 14^2 - 2(28) = 2(7)(14) - 2(28) = 7(28) - 2(28) = (7-2)(28) = 5(28)$, de donde se sigue que $n = 5$. Por lo tanto, $DE = n = 5$, $EM = 14 - n = 9$, $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ y el área de $ABCD$ es igual a $84 \times 3 = 252$.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel II

1) Por el criterio de divisibilidad del 4, para que $\overline{abcd}$ sea múltiplo de 4, debemos tener que $\overline{cd}$ es múltiplo de 4. Como hay 25 múltiplos de 4 que se pueden formar con dos dígitos, tenemos 25 maneras de elegir al número $\overline{cd}$.
Para que $\overline{ab}$ sea múltiplo de 2, b debe ser par. Por lo tanto, tenemos 5 maneras de elegir al dígito b.
Para que $\overline{abc}$ sea múltiplo de 3, por el criterio de divisibilidad del 3 debemos tener que $a + b + c$ es múltiplo de 3. Si $b + c$ es $3, 6, 9, 12, 15$ o 18, entonces a debe ser $3, 6$ o 9. Si $b + c$ es $4, 7, 10, 13$ o 16, entonces a debe ser $2, 5$ u 8. Si $b + c$ es $2, 5, 8, 11, 14$ o 17, entonces a debe ser $1, 4$ o 7. En cualquier caso, a siempre tiene 3 opciones.
Finalmente, para que $\overline{abcde}$ sea múltiplo de 5, e debe ser 0 o 5, esto es, e tiene 2

opciones.
En total hay $25 \times 5 \times 3 \times 2 = 750$ números fósiles.

2) En el triángulo ACD, tracemos la altura desde el vértice D y sea E el pie de dicha altura.



Por el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC, tenemos que

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225.$$

Así que $AB = 15$. Como $\angle DAE = \angle BAC$ y $\angle AED = \angle ACB = 90°$, por el criterio de semejanza AA tenemos que los triángulos ADE y ABC son semejantes. De aquí que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, esto es, $\frac{5}{15} = \frac{AE}{12} = \frac{DE}{9}$. Esto implica que $AE = 4$, $DE = 3$ y, por lo tanto, $CE = 8$. Aplicando ahora el teorema de Pitágoras en el triángulo CDE, concluimos que $CD^2 = CE^2 + DE^2 = 73$.

3) Sean A, B, C y D los colores. Empezamos viendo las opciones para colorear el renglón central. Si la primera zona se pinta del color A, la segunda irá de un color diferente, digamos B y la tercera tendrá dos opciones: ser A de nuevo o ser un tercer color, C.
Caso 1: A, B, A. Hay 4 maneras de elegir el color A y 3 maneras de elegir el color B. Una vez elegidos, en el segundo y cuarto renglones solo pueden aparecer los colores C y D. De hecho, aparecerán ambos. Hay 2 opciones: primero C y luego D o primero D y luego C. Finalmente, en el primer y último renglón tendremos solo A y B como opciones. En total hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 192$ maneras.
Caso 2: A, B, C. Hay 4 maneras de elegir el color A, 3 maneras de elegir el color B y 2 maneras de elegir el color C. Una vez elegidos, tanto el segundo renglón como el tercero tendrán solo tres opciones. Primero C, luego A; primero C, luego D o primero D y luego A. Finalmente, en el primer y último renglón tendremos solo dos opciones. En total hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 864$ maneras.
Por lo tanto, la respuesta es $192 + 864 = 1056$.

4) Sea $n = abcdefg$ uno de los números buscados. Por el criterio de divisibilidad del 11, $x = a + c + e + g - (b + d + f)$ debe ser múltiplo de 11. Nótese que el valor mínimo de x es $(1 + 1 + 1 + 1) - (3 + 3 + 2) = -4$, mientras que el valor máximo de x es $(3+3+2+2) - (1+1+1) = 7$, por lo que $x = 0$ es el único valor posible. Sea $y = a + c + e + g = b + d + f$. Entonces, la suma de los dígitos de n es $2y$.

Obsérvese que el valor mínimo de $2y$ es $3+3+1+1+1+1+1=11$, mientras que el valor máximo de $2y$ es $3+3+2+2+2+2+2=16$, de donde se sigue que y puede ser 6, 7 u 8.

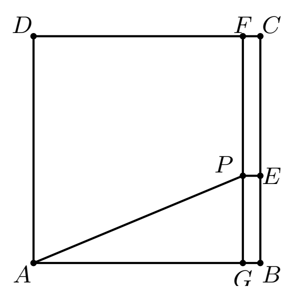
a) Si $y=6$, entonces no puede suceder que dos de los dígitos b, d y f sean 3, al igual que con a, c, e y g. Luego, dos de los dígitos b, d y f suman 3, lo que implica que $\{b,d,f\}=\{3,2,1\}$, los cuales se pueden ordenar de $3!=6$ formas. Como tres de los dígitos a, c, e y g suman 3, entonces esos tres tienen que ser iguales a 1 y el otro igual a 3, dando un total de $4\cdot 6=24$ números en este caso.

b) Si $y=7$, como $b+d+f=7$, entonces b, d, f deben ser 1, 3, 3 (en algún orden) o 2, 2, 3 (en algún orden). En el primer caso, como $a+c+e+g=7$ y ninguno es 3, se tiene que tres de los dígitos deben ser 2 y el otro debe ser 1, dando $3\cdot 4=12$ números. En el segundo caso, uno de los números a, c, e, g es 3 y los demás suman 4, por lo que los dígitos a, c, e, g son 1, 1, 2, 3 en algún orden, dando $3\cdot\binom{4}{2}\binom{2}{1}=36$ números. Así, en este caso hay un total de $12+36=48$ números que cumplen.

c) Si $y=8$, como $b+d+f=8$, la única opción es que b, d, f sean 2, 3, 3 en algún orden. Además, como $a+c+e+g=8$ y ninguno es 3, entonces $a=c=e=g=2$. Se sigue que solo hay 3 números en este caso.

Por lo tanto, en total hay $24+48+3=75$ números que cumplen.

5) Tracemos la perpendicular por P a los lados AB y CD. Esta recta interseca a AB y a CD en G y F, respectivamente.



Nótese que $PEBG$ es un rectángulo, por lo que $GB=PE=1$ cm. Entonces, $AG=AB-GB=12$ cm y, por el teorema de Pitágoras, $GP=\sqrt{PA^2-AG^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$ cm. Esto implica que $PF=GF-GP=13-5=8$ cm. Por lo tanto, el área del triángulo CPD es igual a $\frac{PF\cdot CD}{2}=\frac{13\cdot 8}{2}=52$ cm^2.

6) Si k es un entero positivo, entonces $k\cdot k!=k!\,[(k+1)-1]=(k+1)!-k!$ Usando esta relación y llamando S a la suma $49\cdot 1\cdot 1!+49\cdot 2\cdot 2!+\cdots+49\cdot 49\cdot 49!$, tenemos que

$$\begin{aligned} S &= 49\,(1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+49\cdot 49!)\\ &= 49[(2!-1!)+(3!-2!)+\cdots+(50!-49!)]=49\,(50!-1!)\,. \end{aligned}$$

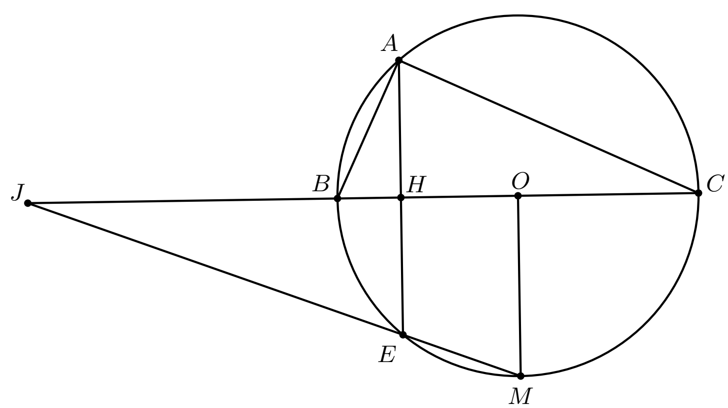
Como $49 \mid 50!$, tenemos que $\mathrm{mcd}(49, 50!-1) = 1$, por lo que 7 no divide a $50!-1$. Así, los únicos factores 7 de $49(50!-1)$ son los factores 7 de 49, de los cuales hay 2.

7) El número total de números escritos por Ángel es $2^8 = 256$, por la diferente elección de signo de los 8 números. Notemos que la cantidad de números positivos es igual a la cantidad de números negativos, pues si una expresión da como resultado un número positivo, invirtiendo los signos de los 8 números que pertenecen a la operación se obtiene un número negativo (que corresponde al número positivo mencionado anteriormente), por lo que basta enfocarse en aquellas expresiones cuyo resultado es 0. Para eso, los números del 1 al 8 se dividen en dos conjuntos A y B dependiendo de cuáles serán positivos (conjunto A) y cuáles serán negativos (conjunto B). Como el 8 pertenece a alguno de los dos conjuntos, sin pérdida de generalidad se puede asumir que está en A y multiplicar por 2 la cantidad de formas que se obtengan.
La suma de ambos conjuntos debe ser la misma. Como la suma de los 8 números es $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$, en cada conjunto se debe sumar 18, por lo que una vez puesto el 8 en A, el resto de los números de A deben sumar $18-8 = 10$. Así, obtenemos las siguientes posibilidades:

$$8, 1, 2, 3, 4; \quad 8, 7, 2, 1; \quad 8, 6, 3, 1; \quad 8, 5, 3, 2; \quad 8, 5, 4, 1; \quad 8, 7, 3; \quad 8, 6, 4.$$

Son 7 posibilidades si 8 está en A, por lo que Ángel escribe $7 \cdot 2 = 14$ veces el número 0 en el pizarrón. Por lo tanto, la cantidad de resultados positivos es $\frac{256-14}{2} = 121$.

8) Sea H el punto de intersección de AE con BC y consideremos al centro de la circunferencia Γ. Este punto es el punto medio de BC, ya que el triángulo ABC es rectángulo.



Al ser M punto medio del arco $\widehat{BC}$, tenemos que OM y BC son perpendiculares y también tenemos que AE y BC son perpendiculares. Entonces, al ser OM y AE

perpendiculares a BC, obtenemos que OM y AE son paralelas. Por el teorema de Tales, tenemos que los triángulos JHE y JOM son semejantes, lo cual implica que $\frac{JE}{JM} = \frac{HE}{OM}$. Sin embargo, por simetría tenemos que $HE = AH$, así que $HE = \frac{1}{2}AE$. Además, OM es el radio del círculo y como BC es un diámetro, tenemos que $OM = \frac{1}{2}BC$. Por lo tanto,

$$\frac{JE}{JM} = \frac{HE}{OM} = \frac{\frac{1}{2}AE}{\frac{1}{2}BC} = \frac{AE}{BC}.$$

Competencia Internacional de Matemáticas 2021 (Nivel Secundaria)

La Competencia Internacional de Matemáticas del año 2021 (IIMC 2021), se llevó a cabo de forma virtual del 27 de julio al 1 de agosto de 2021 y fue organizada por Indonesia. En esta ocasión, México participó con dos equipos de Primaria y dos equipos de Secundaria, obteniendo una medalla de oro, 4 medallas de plata, 9 medallas de bronce y una mención honorífica, en las pruebas individuales. En las pruebas por equipos, se obtuvieron una medalla de plata y dos medallas de bronce.

Por segunda ocasión, un estudiante mexicano de primaria logra una medalla de oro en esta competencia internacional. En el año 2019, cuando esta competencia se realizó en Sudáfrica, un estudiante de la Ciudad de México obtuvo por primera vez una medalla de oro y México fue catalogado por los organizadores como "potencia matemática emergente". En el año 2020 la IMC se suspendió debido a la emergencia sanitaria de Covid-19, para evitar contagios entre los cientos de niños y jóvenes de más de 30 países que ya estaban convocados para viajar a Indonesia. En este 2021, derivado del entusiasmo que se generó en 2019 por el triunfo de los competidores de ese año, México participó por primera vez con dos equipos de secundaria y dos equipos de primaria. En total, 16 competidores mexicanos realizaron a distancia los exámenes correspondientes, desde 10 Estados del país.

La prueba individual del nivel elemental, consiste de 15 preguntas en el que se requiere que las respuestas sean solo números (nada de andar tratando de explicar o poner anotaciones). Son 90 minutos, cada problema vale 10 puntos y no hay puntos parciales. Como verás, la mayoría de los problemas son retadores pero no exageradamente complicados; este tipo de problemas normalmente requieren algún pequeño truco, teoremita o simplemente mucha rapidez para hacer cuentas.
La prueba individual en el nivel Secundaria, consiste de 15 preguntas también, dividi-

das en dos secciones A y B, para resolver en un tiempo de 120 minutos. En la sección A son 12 preguntas con las mismas reglas que en el nivel elemental; en la sección B son 3 preguntas, cada una vale 20 puntos (es decir, lo equivalente a 4 preguntas de la sección anterior), hay puntos parciales y se tiene una página completa -y nada más- para redactar las soluciones. Esta segunda parte es similar a un examen común y corriente de Olimpiada con la restricción de espacio y tiempo.
Las reglas de la prueba por equipos son las mismas tanto para el nivel elemental (Primaria) como para el nivel Secundaria. En ambos casos, los equipos están formados por 4 integrantes (del mismo país) y empiezan la prueba juntos. Reciben 8 problemas, cada uno impreso en una hoja individual. Empieza a correr el tiempo y tienen 10 minutos para hablar y decidir quién resolverá cuál problema, sin hacer anotaciones de ningún tipo; cada integrante debe tener al menos un problema, los problemas impares requieren solo respuesta mientras que los problemas pares requieren solución y sí pueden recibir puntos parciales. Terminados esos 10 minutos, cada integrante del equipo debe trabajar de manera individual durante 35 minutos para resolver los problemas que eligió. Al concluir esos 35 minutos, deben entregar sus hojas y vuelven a juntarse. Reciben 2 problemas más y tienen 25 minutos para resolverlos trabajando en equipo. La prueba completa dura 70 minutos.

En la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) se premia Oro, Plata, Bronce y Mención Honorífica en proporción 1:2:3:4. A diferencia de otros países participantes como India, Irán o Estados Unidos, México realiza un largo proceso selectivo, en busca de mejores resultados. Desde que un participante presenta su primer examen en su estado hasta que presenta el examen de la IMC, pueden pasar hasta dos años. Los estudiantes mexicanos que participaron en esta IMC, se seleccionaron de las preselecciones del Concurso Nacional de la 4^a OMMEB realizada en octubre de 2020 de forma virtual.

Los resultados individuales de los equipos de Secundaria en la IIMC 2021 fueron los siguientes.

Nombre	**Estado**	**Medalla**	**Equipo**
Franco Giosef Álvarez González	Chiapas	Bronce	A
Fernando Álvarez Ruiz	Nuevo León	Bronce	A
Emiliano Hernández Barranco	Morelos	Bronce	A
Sebastián Montemayor Trujillo	Nuevo León	Bronce	A
Rosa Victoria Cantú Rodríguez	Ciudad de México	Bronce	B
Mateo Iván Latapí Acosta	Ciudad de México	Plata	B
Isaac Montaño Manríquez	Baja California Sur	Plata	B
Daniel Ramírez Kühn	San Luis Potosí	Mención	B

En la prueba por equipos, los resultados fueron los siguientes: El equipo A obtuvo medalla de plata y el equipo B obtuvo medalla de bronce. Las medallas por equipos se otorgan a los mejores puntajes obtenidos en la prueba por equipos.
Los profesores que participaron como líderes y colíderes de cada equipo fueron: Kevin William Beuchot Castellanos (líder del Equipo A), Gerardo Hernández Valdez (colíder

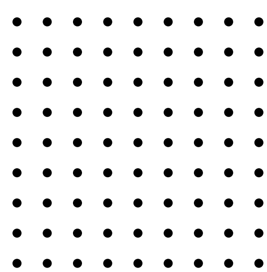
del Equipo A), Adán Medrano Martín del Campo (líder del Equipo B) y Olga Medrano Martín del Campo (colíder del Equipo B).

A continuación presentamos los problemas y soluciones de la prueba individual y de la prueba por equipos en el Nivel Secundaria de la IMC del año 2021.

Examen Individual, Nivel Secundaria

Sección A

1) Se tienen 81 puntos acomodados en un tablero de 9×9 como se muestra en la figura. Si la distancia entre cualesquiera dos puntos adyacentes en la misma fila o columna es de 1 cm, determina el número de rectángulos que se pueden formar teniendo un área de 12 cm^2, donde los cuatro vértices del rectángulo deben ser parte de los 81 puntos marcados.



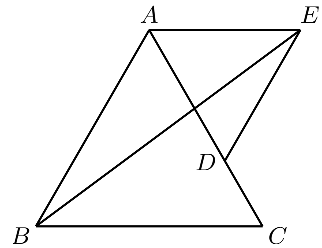
2) Hay 99 números colocados alrededor de un círculo, cada uno de ellos es 1 o -1. Se calcula el producto de cada bloque de 10 números adyacentes alrededor del círculo. Sea S la suma de estos 99 productos. Si hay al menos un 1 alrededor del círculo y al menos un -1 alrededor del círculo, ¿cuál es la diferencia entre el mayor valor posible y el menor valor posible de S?

3) Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios cuadráticos con coeficientes enteros tales que el coeficiente líder (principal) de ambos es 1. Se sabe que $P(Q(0)) = Q(P(0)) = 1$ y $P(0) + Q(0) = 2$. Encuentra el valor de $P(3) + Q(3)$.

4) Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$, una permutación aleatoria de los números 1, 2, 3, …, 9. ¿Cuál es el mayor valor posible de

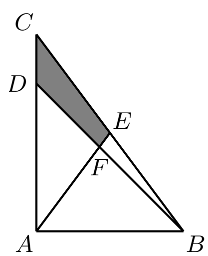
$$|a_1 - \sqrt{3}a_2| + |a_2 - \sqrt{3}a_3| + |a_3 - \sqrt{3}a_4| + \cdots + |a_8 - \sqrt{3}a_9| + |a_9 - \sqrt{3}a_1|?$$

5) En la figura de abajo, ABC y ADE son ambos triángulos equiláteros cuyos lados miden 6 cm y 4 cm, respectivamente. Encuentra la longitud, en cm, de BE.



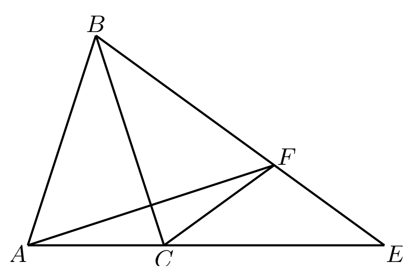
6) Sean x y y números reales tales que $(2x + \sqrt{1+4x^2})(3y + \sqrt{1+9y^2}) = 1$. Encuentra el valor numérico de $(2x+3y)^2$.

7) En la figura, el ángulo en A es recto, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm y $CD = 1$ cm. Si $BE = EC$, ¿cuál es el área, en cm^2, de la región sombreada?



8) Si un número primo se puede escribir de la forma $k^k + 1$, donde k es un entero positivo, entonces tal número primo se conoce como un *número primo IMC*. Encuentra el mayor número primo IMC menor o igual a 20212021.

9) En un triángulo isósceles ABC, donde $AB = BC$, el punto E está sobre la extensión del lado AC, donde C está entre A y E y, el punto F, está sobre el segmento BE de tal forma que $AC = CF = FE$ y $\angle BAF = 3\angle FAE$, como se muestra en la figura. Encuentra la medida, en grados, de $\angle FAE$.



10) Encuentra el mayor entero positivo n tal que $n+3$ divide a $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

11) La nación de *IMC-landia* consiste de 8 islas, de las cuales no hay dos que estén conectadas entre sí. Como cada ciudadano quiere visitar cada una de las otras islas,

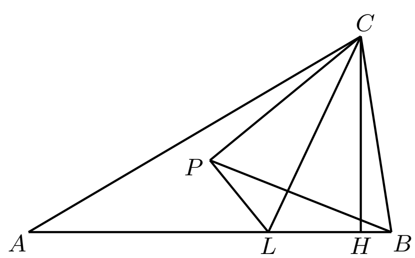
el gobierno planea construir puentes entre las islas. Sin embargo, cada isla tiene un volcán que podría hacer erupción en cualquier momento, destruyendo esa isla y cualquier puente que esté conectado a ella. El gobierno quiere garantizar que después de cualquier erupción, un ciudadano de cualquiera de las 7 islas restantes pueda hacer un viaje, visitando cada una de las islas restantes exactamente una vez y regresando a su isla de origen (solo al final del viaje). ¿Cuál es el mínimo número de puentes que se deben construir?

12) Dado que $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{1}{2021}$, encuentra el valor de

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}.$$

Sección B

1) Sea P un punto interior del triángulo acutángulo ABC tal que $CP = BP$ y $\angle BPC = 2\angle BAC$. La bisectriz del ángulo $\angle ACB$ y AB, se intersecan en L. Sea H un punto sobre AB tal que $CH \perp AB$, donde L se encuentra entre los puntos A y H, como se muestra en la figura. Si $CP = CH = 28$ cm y el área del triángulo CPL es 196 cm^2, encuentra la medida, en cm, de LH.

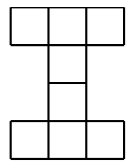


2) En una clase de 14 niños y 17 niñas se van a distribuir algunos dulces. Cualesquiera dos niños reciben la misma cantidad de dulces, mientras que cualesquiera dos niñas reciben la misma cantidad de dulces. Cada persona recibe al menos un dulce, pero el número de dulces que recibe cada niño puede ser diferente al que recibe cada niña. Si el número total de dulces no se puede redistribuir de ninguna otra manera de tal forma que se cumplan las condiciones, determina el mayor número de dulces que se pueden tener.

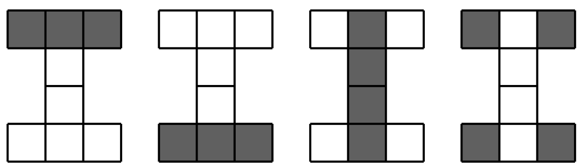
3) Sean M y N enteros no negativos tales que C_{1010}^{2021} es divisible por $2^M \times 3^N$. Encuentra la suma de todos los valores posibles de $M + N$. (Nota: C_{1010}^{2021} se refiere a la combinación de 2021 objetos de donde se toman 1010 al mismo tiempo sin repetición).

Examen por Equipos, Nivel Secundaria

1) Considera el diagrama en forma de “I” que se muestra a continuación.



En cada cuadrado se coloca exactamente un número de los siguientes ocho números: $-1, -1, -1, 0, 0, 1, 1$ y 1, de tal forma que las sumas de los números en los cuadrados de las figuras sombreadas (como se ve en las figuras de abajo) sean todas iguales. ¿De cuántas maneras se pueden colocar los números en el diagrama?

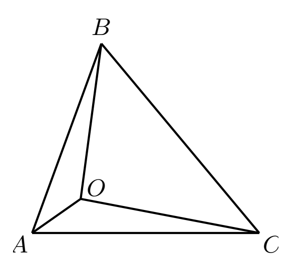


2) Sean x y y números reales tales que

$$\begin{aligned} x^2 + 5xy + y^2 &= 7, \\ x^2y + xy^2 &= 2, \\ x + y &\neq 2. \end{aligned}$$

Encuentra todos los valores posibles de $x^2 + y^2$.

3) Sean ABC un triángulo y O un punto en su interior tal que $\angle ABO = \angle CAO$, $\angle BAO = \angle BCO$ y $\angle BOC = 90°$, como se muestra en la figura. Si $AC = 2$ cm, encuentra la medida, en cm, de OC.

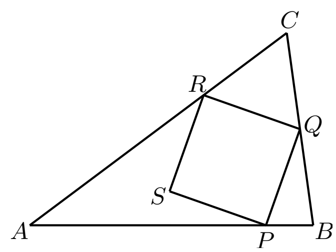


4) Encuentra todos los enteros m de cuatro dígitos que son menores que 2021 para los cuales existe un entero positivo n tal que $m - n$ es un número primo positivo y $m \times n$ es un cuadrado perfecto.

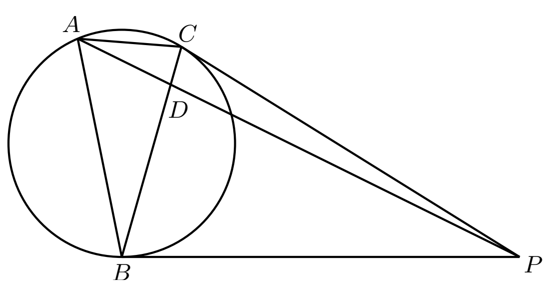
5) Los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ están sobre una línea, en este orden, de forma que $A_1A_2 = \frac{1}{1\times 2}$ cm, $A_2A_3 = \frac{1}{2\times 3}$ cm, $A_3A_4 = \frac{1}{3\times 4}$ cm,..., $A_{99}A_{100} = \frac{1}{99\times 100}$ cm. Si el segmento A_mA_n, donde $1 \leq m < n \leq 100$, tiene una longitud de $\frac{1}{15}$ cm, ¿cuál es el mayor valor posible de $m + n$ que satisface las condiciones dadas?

6) Usando cuatro colores diferentes, cada uno al menos una vez, ¿de cuántas maneras se pueden pintar los enteros $1, 2, 3, \ldots, 10$, de tal forma que cualesquiera dos enteros cuya diferencia es un número primo deben estar pintados de colores diferentes?

7) En la figura, ABC es un triángulo donde $AB = 60$ cm y $AC = 68$ cm. $PQRS$ es un cuadrado tal que $AP = 50$ cm, $AR = 46$ cm y Q es el punto medio de BC. ¿Cuál es la razón del área del cuadrado $PQRS$ al área del triángulo ABC?



8) Sea ABC un triángulo acutángulo inscrito en el círculo O. Sea P un punto fuera de O tal que PB y PC son ambos tangentes a O. Si AP y BC se intersecan en D y $\frac{BD}{CD} = 5$, ¿cuál es el valor de $\frac{AB}{AC}$?



9) Un entero positivo n se dice que es *interesante* si satisface la siguiente propiedad: Si p es un número primo divisor de n, entonces $2p+1$ es un divisor de n. Encuentra la cantidad total de divisores positivos del menor número interesante.

10) ¿De cuántas maneras diferentes se puede expresar 2021 como una suma usando los números $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ y 1024, donde solo se permite que cada uno de los once números aparezca a lo mucho dos veces en la suma? El orden de los términos en la suma no importa. Por ejemplo, $2+1+1$ y $1+2+1$ se consideran como la misma manera de expresar a 4.

Soluciones del Examen Individual

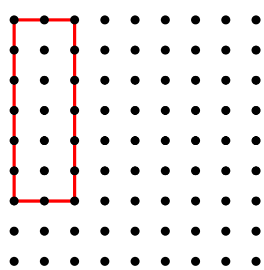
Parte A

1) La respuesta es 142. Si consideramos el lado más corto del rectángulo en cuestión, este debe ser a lo mcuho $\sqrt{12}$, pero también debe ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos enteros. Un lado que sea paralelo a las líneas de la cuadrícula de lado 2 o 3 funciona, y un lado que sea perpendicular a las diagonales de cada cuadrito de la cuadrícula de lado $\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$ también funciona, pero se puede revisar que $\sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}$ y $\sqrt{3^2+1} = \sqrt{10}$ no producirán un lado de un rectángulo que sea válido. Así, hay dos casos posibles.

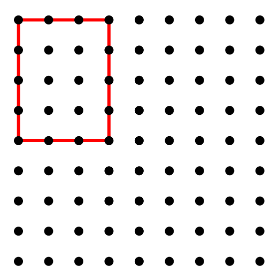
Caso 1) La base está hecha de lados de la cuadrícula (cada uno de 1 cm de lado). En este caso, para factorizar a 12 en factores enteros positivos menores que 9, tenemos las siguientes posibilidades:

(A) $12 = 2 \times 6 = 6 \times 2$. Si el lado de longitud 2 es horizontal, existen 7 maneras de posicionar este rectángulo horizontalmente y 3 maneras de posicionarlo verticalmente, y si el lado de longitud 2 es vertical hay la misma cantidad de maneras, por lo que el número de rectángulos que se pueden formar es $7 \times 3 \times 2 = 42$.

(B) $12 = 3 \times 4 = 4 \times 3$. Similarmente, el número de rectángulos que se pueden formar es $6 \times 5 \times 2 = 60$.



(a) *Caso 1 (A)*



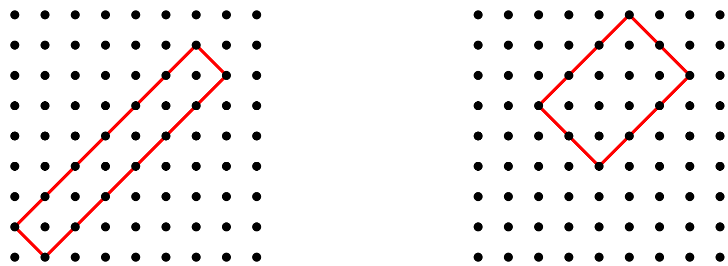
(b) *Caso 1 (B)*

Caso 2) La base está hecha de diagonales de la cuadrícula (cada una de $\sqrt{2}$ cm de longitud). Así, tenemos que $\left(x\sqrt{2}\right)\left(y\sqrt{2}\right) = 12$, por lo que $xy = 6$. Hay dos maneras de factorizar a 6 en enteros positivos:

(A) $6 = 1 \times 6 = 6 \times 1$. Análogamente, el número de rectángulos que se pueden formar es igual a $2 \times 2 \times 2 = 8$.

(B) $6 = 2 \times 3 = 3 \times 2$. Análogamente, el número de rectángulos que se pueden formar es igual a $4 \times 4 \times 2 = 32$.

Combinando todos los casos, el número total de rectángulos que se pueden formar es $42 + 60 + 8 + 32 = 142$.



(a) *Caso 2 (A)* **(b)** *Caso 2 (B)*

2) La respuesta es 192. Como cada producto es igual a 1 o -1, el valor de S siempre es impar. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ los números en orden cíclico, con $a_n = a_{n-99}$ siempre que $n > 99$.

   (a) El valor mínimo de S es -97. Este puede ser alcanzado con 10 copias de -1, donde cada par adyacente de -1 es separado por 9 copias de 1, excepto por una pareja que es separada por solamente 8 copias de 1. Cada bloque de 10 números adyacentes contendrán exactamente un -1, con la única excepción del bloque con un -1 en cada extremo y el resto siendo 1. Si -97 no es el mínimo, entonces debe ser -99, lo que significa que los 99 productos deben ser iguales a -1. Como $a_1a_2\cdots a_{10} = -1 = a_2a_3\cdots a_{11}$, debe suceder que $a_1 = a_{11}$. Similarmente, $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{91}$. Como 10 y 99 son primos relativos, entonces con este proceso se puede probar que todos los a_i's son iguales, lo cual es imposible.

   (b) El valor máximo de S es 95. Esto se puede alcanzar teniendo dos copias adyacentes de -1 y el resto de los números iguales a 1. Hay exactamente dos bloques de 10 números adyacentes que contendrán exactamente un -1 cuyo producto será igual a -1. Todos los demás bloques tendrán bloque igual a 1. Si 95 no es el máximo valor, debe ser 97 o 99. No puede ser 99 pues entonces todos los números serían iguales a 1 (por el razonamiento hecho en el inciso anterior), lo cual no es posible. Supongamos que es 97, lo cual significa que exactamente uno de los bloques de 10 números adyacentes es igual a -1. Sea $a_1a_2\cdots a_{10} = -1$. Entonces $a_1 = -a_{11}$ pero $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{91}$. Como 10 y 99 son primos relativos, entonces con este razonamiento se prueba que todos los números son iguales excepto uno, donde sucederá que habrá exactamente diez bloques de 10 números adyacentes con producto igual a -1, teniendo así $S = 79 \neq 97$.

Por lo tanto, la diferencia entre el máximo valor y el mínimo valor es igual a $95 - (-97) = 192$.

Solución alternativa. Como el producto total de los 99 productos es igual a

$$(a_1a_2\cdots a_{10})(a_2a_3\cdots a_{11})\cdots(a_{99}a_1\cdots a_9) = (a_1a_2\cdots a_{99})^{10} = (\pm 1)^{10} = 1,$$

debe suceder que hay una cantidad par de -1's entre los 99 productos. Así, $S = (99-2k) - 2k = 99 - 4k$ para algún entero k, lo cual descarta las posibilidades

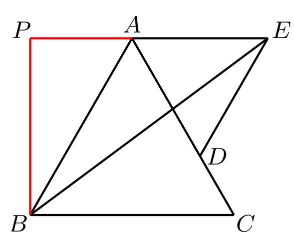
$S = 97$ y $S = -99$. Los ejemplos para $S = 95$ y $S = -97$ son los mismos que en la primera solución, dando así que la diferencia buscada es $95 - (-97) = 192$.

3) La respuesta es 14. Sean $P(x) = x^2 + ax + b$ y $Q(x) = x^2 + cx + d$. De las condiciones $P(Q(0)) = Q(P(0)) = 1$, tenemos que $d(d + a) + b = 1$ y $b(b + c) + d = 1$. De la condición $P(0) + Q(0) = 2$, tenemos que $b + d = 2$. Todo esto implica que $d(d + a) = d - 1$ y $b(b + c) = b - 1$. Por lo tanto, d divide a $d - 1$ y b divide a $b - 1$. Luego, tenemos que $b = \pm 1$ y $d = \pm 1$. Como $b + d = 2$, la única posibilidad es $b = d = 1$ y, por consiguiente, $a = c = -1$. Entonces, $P(x) = Q(x) = x^2 - x + 1$ y $P(3) + Q(3) = 7 + 7 = 14$.

4) La respuesta es $3 + 33\sqrt{3}$. Cada valor absoluto en la suma es de la forma $|x - y|$, cuyos valores posibles son $x - y$ o $y - x$. Tenemos 18 valores posibles: $1, 2, \ldots, 9$, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}, \ldots, 9\sqrt{3}$, de los cuales 9 de ellos serán sumados y 9 de ellos serán restados. Entonces, para maximizar la suma debemos restar los nueve números más pequeños entre los posibles 18 valores. Como $3\sqrt{3} < 6$, pero $4\sqrt{3} > 6$, los nueve números más pequeños que debemos restar son: $1, 2, 3, 4, 5, 6, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$.
Por otro lado, también debemos verificar que hay una permutación que satisface lo anterior. Necesitamos asegurar que cada uno de de los números $1, 2, 3$ aparece después de los números $7, 8, 9$. Por ejemplo, con la permutación $7, 1, 8, 2, 9, 3, 4, 5, 6$ se alcanza la suma máxima:

$$\begin{aligned}
&|7 - \sqrt{3}| + |1 - 8\sqrt{3}| + |8 - 2\sqrt{3}| + |2 - 9\sqrt{3}| + |9 - 3\sqrt{3}| + |3 - 4\sqrt{3}| + \\
&\quad + |4 - 5\sqrt{3}| + |5 - 6\sqrt{3}| + |6 - 7\sqrt{3}| \\
&= (4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 7\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 7 + 8 + 9) \\
&\quad - (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) \\
&= 33\sqrt{3} + 3.
\end{aligned}$$

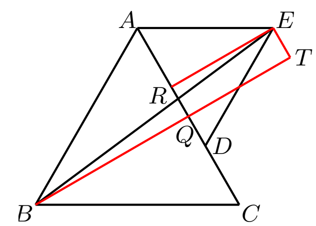
5) La respuesta es $2\sqrt{19}$ cm. Sea P el pie de la perpendicular desde B a AE.



Observemos que los ángulos del triángulo BAP son $30°$, $60°$ y $90°$, por lo que $AB = 6$ cm. Se sigue que $AP = 3$ cm y $BP = 3\sqrt{3}$ cm. Finalmente, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo EPB, concluimos que

$$BE = \sqrt{BP^2 + EP^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 7^2} = \sqrt{27 + 49} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \text{ cm}.$$

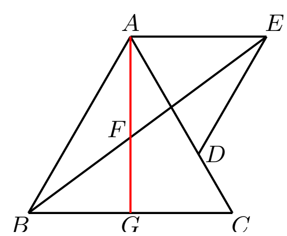
Segunda solución. Sean Q el pie de la perpendicular a AC desde B, T el pie de la perpendicular desde E a BQ y R el pie de la perpendicular desde E a AC.



Se puede ver que $QA = 3$ cm y $AR = 2$ cm, por lo que $ET = RQ = 1$ cm. Así, $BQ = 3\sqrt{3}$ cm y $TQ = ER = 2\sqrt{3}$ cm, pues son alturas de triángulos equiláteros. Finalmente, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo ETB, obtenemos que

$$BE = \sqrt{BT^2 + ET^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{75+1} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \text{ cm.}$$

Tercera solución. Sea G el punto medio de BC. El segmento AG interseca a BE en F.



Nótese que los triángulos AFE y GFB son semejantes, por lo que $\frac{AF}{GF} = \frac{EF}{BF} = \frac{AE}{BG} = \frac{4}{3}$, esto es, $BE = \frac{7}{3}BF$ y $GF = \frac{3}{7}AG = \frac{9}{7}\sqrt{3}$ cm. Obsérvese que FG y BC son perpendiculares y, por el teorema de Pitágoras en el triángulo BGF, obtenemos que $BF = \sqrt{GF^2 + BG^2} = \sqrt{\frac{243}{49} + 9} = \frac{684}{49} = \frac{6}{7}\sqrt{19}$ cm. Por lo tanto, $BE = \frac{7}{3}BF = 2\sqrt{19} = \sqrt{76}$ cm.

Cuarta solución. Como los triángulos ABC y ADE son equiláteros, se sigue que $\angle BAE = 120°$. Usando la ley de cosenos en el triángulo ABE, obtenemos que

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2(AB)(AE)(\cos\angle BAE) = 36 + 16 - 2(6)(4)\left(-\frac{1}{2}\right) = 76.$$

Por lo tanto, $BE = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ cm.

6) La respuesta es 0. Sea $u = 2x + \sqrt{1+4x^2}$. Tenemos que $u(3y + \sqrt{1+9y^2}) = 1$, esto es, $3y + \sqrt{1+9y^2} = \frac{1}{u}$, lo cual implica que

$$1 + 9y^2 = \left(\frac{1}{u} - 3y\right)^2 = \frac{1}{u^2} - \frac{6y}{u} + 9y^2.$$

Simplificando, obtenemos que $y = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{u} - u\right)$. Observemos que

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{2x + \sqrt{1+4x^2}} = \frac{2x - \sqrt{1+4x^2}}{4x^2 - (1+4x^2)} = \sqrt{1+4x^2} - 2x.$$

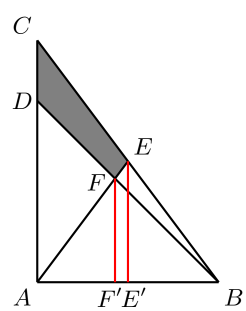
Entonces,

$$y = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{u} - u\right) = \frac{1}{6}\left(\sqrt{1+4x^2} - 2x - \left(2x + \sqrt{1+4x^2}\right)\right) = -\frac{2}{3}x$$

y, por lo tanto, $(2x+3y)^2 = \left(2x + 3\left(-\frac{2}{3}x\right)\right)^2 = 0$.

Solución alternativa. Si $u = 2x + \sqrt{1+4x^2}$, entonces $1 + 4x^2 = (u-2x)^2$, de donde $2x = \frac{u^2-1}{2u}$. Análogamente, como $3y + \sqrt{1+9y^2} = \frac{1}{u}$, tenemos que $1+9y^2 = \left(\frac{1}{u} - 3y\right)^2$, de donde se sigue que $3y = \frac{1-u^2}{2u}$. Por lo tanto, $(2x+3y)^2 = \left(\frac{u^2-1}{2u} + \frac{1-u^2}{2u}\right)^2 = 0$.

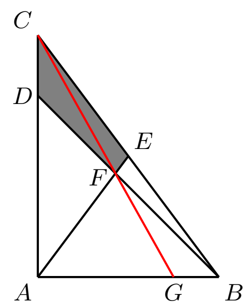
7) La respuesta es $\frac{15}{14}$ cm^2. Denotemos por (X) al área de la figura X. Por el teorema de Pitágoras, tenemos que $AC = 4$ cm, por lo que $AD = 3$ cm. De aquí, obtenemos que $(ABC) = 6$ cm^2, lo que implica que $(ABD) = \frac{3}{4} \times 6 = \frac{9}{2}$ cm^2 y $(ABE) = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ cm^2. Sean E' y F' las proyecciones de E y F sobre AB, respectivamente, y sea $FF' = x$ cm.



Entonces, $(ABF) = \frac{3}{2}x$ cm^2. Luego, $\frac{BF'}{AB} = \frac{BF}{BD} = \frac{(ABF)}{(ABD)} = \frac{x}{3}$. Similarmente, obtenemos que $\frac{AF'}{AB} = \frac{AF'}{2AE'} = \frac{AF}{2AE} = \frac{(ABF)}{2(ABE)} = \frac{x}{4}$. Por lo tanto, $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 1$, de donde $x = \frac{12}{7}$. Así, el área de la figura sombreada, es igual a

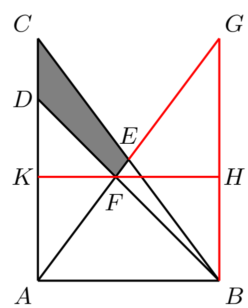
$$(CDEF) = (ABC) + (ABF) - (ABD) - (ABE) = 6 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} - 3 = \frac{15}{14}\text{cm}^2.$$

Segunda solución. Tracemos la recta CF de tal forma que interseque a AB en G. Usando el teorema de Ceva, tenemos que $\frac{AE}{BE} \times \frac{AD}{CD} \times \frac{BG}{AG} = 1$, de donde obtenemos que $AG = 3BG$. Luego, $BG = \frac{1}{4}AB = \frac{3}{4}$ cm y $AG = \frac{3}{4}AB = \frac{9}{4}$ cm. Sea $(CFE) = x$ cm^2. Entonces, $(CFB) = 2(CFE) = 2x$ cm^2 pues $BC = 2CE$; $(CFA) = 3(CFB) = 6x$ cm^2 pues $AG = 3BG$; $(AFB) = 3(CFB) = 6x$ cm^2 pues $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4$ cm y $AD = 3$ cm $= 3CD$.



Ahora, $(ABC) = \frac{AC \times BC}{2} = \frac{4\times 3}{2} = 6$ cm^2, por lo que $2x + 6x + 6x = 6$, es decir, $x = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$. A su vez, $(CDF) = \frac{1}{4}(CFA) = \frac{1}{4} \times 6 \times \frac{3}{7} = \frac{9}{14}$ cm^2 pues $AC = AD + CD = 4CD$. Por lo tanto, el área de la región sombreada, es igual a $\frac{3}{7} + \frac{9}{14} = \frac{15}{14}$ cm^2.

Tercera solución. Por el Teorema de Pitágoras, tenemos que $AC = 4$ cm, por lo que $AD = 3$ cm. Sea G el punto sobre la recta AE tal que GB es perpendicular a AB. Entonces, el triángulo ABG es congruente al triángulo BAC y el triángulo EBG es congruente al triángulo EAC. Así, $(EBG) = (EAC) = \frac{1}{2}(ABC) = 3$ cm^2.



Como AD y BG son paralelas, los triángulos FDA y FBG semejantes, lo cual implica que $\frac{FK}{FH} = \frac{AD}{BG} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{4}$ y, por lo tanto, $FK = 3 \times \frac{3}{7} = \frac{9}{7}$ y $FH = 3 \times \frac{4}{7} = \frac{12}{7}$, por lo que $(FBG) = \frac{BG \times FH}{2} = \frac{24}{7}$ cm^2 y $(BFE) = (FBG) - (EBG) = \frac{24}{7} - 3 = \frac{3}{7}$ cm^2. De aquí, concluimos que el área de la región sombreada es igual a $(CDEF) = (ABC) - (ABD) - (BFE) = 6 - \frac{9}{2} - \frac{3}{7} = \frac{15}{14}$ cm^2.

8) La respuesta es 257. Observemos primero que k no tiene factores primos impares. En efecto, si $k = qd$ donde $q \geq 3$ es primo, entonces $k^k + 1 = (k^d)^q + 1$ es múltiplo de $k^d + 1$ y, por lo tanto, $k^k + 1$ no es primo. Esto significa que k es una potencia de 2. Tenemos que $1^1 + 1 = 2$, $2^2 + 1 = 5$ y $4^4 + 1 = 257$ son números primos, pero $8^8 + 1 = (2^8)^3 + 1$ al ser múltiplo de $2^8 + 1$ no es primo. Si $k \geq 16$, entonces $k^k + 1 \geq 16^{16} + 1 > 10^8 > 20212021$. Concluimos que los valores posibles de k son $1, 2$ y 4. Luego, el mayor número primo IMC que no excede a 20212021 es 257.

Solución alternativa. Como $10^{10}+1 > 20212021$, tenemos que $k < 10$.
Si $k=1$, entonces $k^k+1 = 1^1+1 = 2$ es un número primo.
Si k es impar mayor que 1, entonces k^k es impar y, por ende, k^k+1 es par mayor que 2, esto es, k^k+1 no es primo.
Si $k=2$, entonces $k^k+1 = 2^2+1 = 5$ es un número primo.
Si $k=4$, entonces $k^k+1 = 4^4+1 = 257$ es un número primo.
Si $k=6$, entonces $k^k+1 = 6^6+1 = (6^2)^3+1$ es múltiplo de 6^2+1 y, por ende, no es primo.
Si $k=8$, entonces $k^k+1 = 8^8+1 = (2^8)^3+1$ es múltiplo de 2^8+1 y, por ende, no es primo.
Se sigue que el mayor número primo IMC que no excede a 20212021 es 257.

9) La respuesta es $18°$. Sean $\angle BAF = 3\alpha$ y $\angle FAE = \angle$. Como $AC = CF = FE$, tenemos que $\angle AFC = \alpha$, $\angle FCE = \angle FEC = 2\alpha$ y $\angle AFB = 3\alpha$, lo cual implica que $BA = BF$. Además, como $AC = CF$, los triángulos BAC y BFC son congruentes por el criterio LLL. Entonces, tenemos que $\angle BCF = \angle BCA = \angle BAC = 4\alpha$ (pues $AB = BC$). Como $\angle ACB + \angle BCF + \angle FCE = 180°$, tenemos que $4\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 180°$, de donde se sigue que $\alpha = 18°$.

10) La respuesta es 15. Sea n un entero positivo tal que $n+3$ divide a $S_n = 1^3+2^3+\cdots+n^3$. Si n es par, podemos agrupar por parejas los sumandos de S_n como sigue:

$$S_n = (1^3+2^3)+(3^3+n^3)+(4^3+(n-1)^3)+\cdots+\left(\left(\frac{n+2}{2}\right)^3+\left(\frac{n+4}{2}\right)^3\right).$$

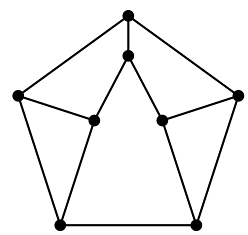
Como $n+3$ divide a cada una de las sumas $3^3+n^3, 4^3+(n-1)^3, \ldots, \left(\frac{n+2}{2}\right)^3 + \left(\frac{n+4}{2}\right)^3$, necesariamente $n+3$ debe dividir a $1^3+2^3 = 9$. Si $n+3 = 1$, entonces $n = -2 < 0$; si $n+3 = 3$, entonces $n = 0$ y, si $n+3 = 9$, entonces $n = 6$. Por lo tanto, la única solución en este caso es $n = 6$.
Si n es impar, podemos agrupar los sumandos de S_n como sigue:

$$S_n = 1^3+2^3+\left(\frac{n+3}{2}\right)^3+(3^3+n^3)+(4^3+(n-1)^3)+\cdots+\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^3+\left(\frac{n+5}{2}\right)^3\right).$$

Como $n+3$ divide a cada una de las sumas de cubos de cada paréntesis, necesariamente $n+3$ debe dividir a $1^3+2^3+(\frac{n+3}{2})^3$. Como n es impar, tenemos que $n+3$ es par, esto es, $n+3 = 2k$ para algún entero positivo k. Entonces, $2k$ divide a $1^3+2^3+(\frac{2k}{2})^3 = 9+k^3$ y, por consiguiente, k divide también a $9+k^3$. Por lo tanto, $k \mid 9$. Si $k = 1$, entonces $n = 2k-3 < 0$, que no puede ser. Si $k = 3$, entonces $n = 3$ es una solución. Si $k = 9$, entonces $n = 15$ es una solución. Luego, hay dos soluciones en este caso.
Concluimos que el mayor entero positivo n tal que $n+3$ divide a S_n es 15.

11) La respuesta es 12. La afirmación crucial es que cada isla debe tener al menos 3 puentes. Para ver esto, nótese que para cada isla, cualquier viaje que pase por ella requiere al menos dos puentes distintos que salgan de dicha isla. Asumamos, con el fin de llegar a una contradicción, que alguna isla S tiene a lo mucho 2 puentes.

Consideremos el caso en el que una de las islas adyacentes a S es destruida. Entonces, solo existirá un puente conectado a S, por lo que no se podrá formar un viaje completo pasando por S. Ahora, cada isla tiene al menos 3 puentes, por lo que hay $3 \times 8 = 24$ “extremos de puentes”. Cada puente tiene exactamente dos “extremos de puente”, por lo que debe haber al menos $\frac{24}{2} = 12$ puentes. La construcción que se muestra a continuación muestra que 12 es alcanzable.



12) La respuesta es $\frac{3031}{2021} = 1\frac{1010}{2021}$. Sean $x = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ y $y = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}$. Es fácil ver que $x + y = 3$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
x - y &= \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{a+c} \\
&= \frac{(a-b)(b+c)(a+c) + (a+b)(b-c)(a+c) + (a+b)(b+c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(a+c)} \\
&= \frac{(a-b)(b+c)(a+c) + (a+b)[(b-c)(a+c) + (b+c)(c-a)]}{(a+b)(b+c)(a+c)} \\
&= \frac{(a-b)(b+c)(a+c) + 2c(a+b)(b-a)}{(a+b)(b+c)(a+c)} \\
&= \frac{(a-b)[(b+c)(a-c) - 2c(a+b)]}{(a+b)(b+c)(a+c)} \\
&= \frac{(a-b)(ab+c^2-ac-bc)}{(a+b)(b+c)(a+c)} = -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(a+c)} = -\frac{1}{2021}.
\end{aligned}$$

Entonces, $x = \left(3 - \frac{1}{2021}\right) \div 2 = \frac{3031}{2021} = 1\frac{1010}{2021}$.

Solución alternativa. Sean $P = abc$, $Q = a2^b + b^2c + c^2a$ y $R = a^2c + b^2a + c^2b$. La condición $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{2021}$ es equivalente a la condición

$$\frac{-Q+R}{2P+Q+R} = \frac{1}{2021}. \qquad (2)$$

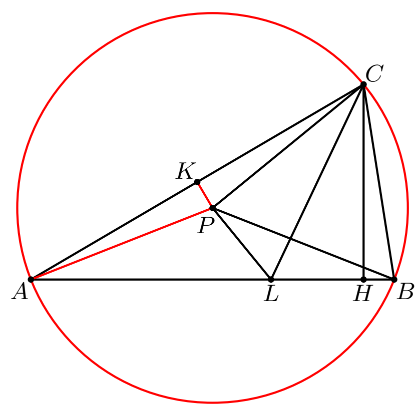
Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a} &= \frac{a(b+c)(c+a)+b(c+a)(a+b)+c(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(a+c)}\\ &= \frac{3P+2Q+R}{2P+Q+R}\\ &= \frac{3P+\frac{3}{2}Q+\frac{3}{2}R}{2P+Q+R}+\frac{\frac{1}{2}Q-\frac{1}{2}R}{2P+Q+R}\\ &= \frac{3}{2}\times\frac{2P+Q+R}{2P+Q+R}-\frac{1}{2}\times\frac{-Q+R}{2P+Q+R}\\ &= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2021}=\frac{3031}{2021},\end{aligned}$$

donde usamos (2) en la penúltima igualdad.

Parte B

1) La respuesta es 14 cm. Observemos que P es el centro de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC. Tracemos PA y sea K el punto en AC tal que PK y AC son perpendiculares. Entonces, $\angle APC = 2\angle ABC$ y, por ende, $\angle KPC = \angle ABC$.

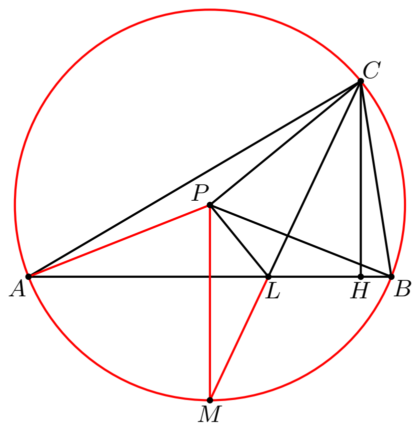


Luego, tenemos que $\angle ACP = 90^\circ - \angle KPC = 90^\circ - \angle ABC$, lo cual implica que $\angle PCL = \angle ACL - \angle ACP = \frac{1}{2}\angle ACB + \angle ABC - 90^\circ$. Como $\angle CHB = 90^\circ$, tenemos que $\angle BCH = 90^\circ - \angle ABC$. Por lo tanto,

$$\angle LCH = \frac{1}{2}\angle ACB - \angle BCH = \frac{1}{2}\angle ACB + \angle ABC - 90^\circ = \angle PCL$$

y, como $CP = CH$, concluimos que los triángulos CPL y CHL son congruentes por el criterio LAL. Esto significa que $\angle CPL = \angle CHL = 90^\circ$ y $LP = LH$. Finalmente, como el área del triángulo CPL es igual a $\frac{LP\times CP}{2} = 196$ cm^2, obtenemos que $LP = \frac{2\times 196}{28} = 14$ cm, esto es, $LH = 14$ cm.

Solución alternativa. Demostraremos de una forma distinta a la que se hizo en la primera solución, que los triángulos CPL y CHL son congruentes. Tenemos que P es el centro de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC. Sea M el punto de intersección de AB con la prolongación de CL. Como $\angle APM = 2\angle ACL = 2\angle BCL = \angle BPM$, se sigue que PM biseca al ángulo $\angle APB$ y, por lo tanto, PM es la mediatriz del segmento AB.



Como $PC = PM$, resulta que el triángulo CPM es isósceles y, por consiguiente, $\angle PCM = \angle PMC$. Además, como PM y CH son paralelas, resulta que $\angle PMC = \angle HCL$ por ser ángulos alternos internos. Por lo tanto, concluimos que $\angle PCL = \angle PCM = \angle PMC = \angle HCL$. Esto significa que los triángulos CPL y CHL son congruentes por el criterio LAL. Terminamos como en la primera solución.

2) La respuesta es 476. Supongamos que cada niño recibe $x > 0$ dulces y que cada niña recibe $y > 0$ dulces. Entonces, tenemos que

$$14x + 17y = n, \tag{3}$$

para algún entero positivo n. Por inspección, tenemos que $14 \times (-6) + 17 \times 5 = 1$, lo cual implica que

$$14 \times (-6n) + 17 \times (5n) = n. \tag{4}$$

Restando (4) de (3), obtenemos que $14(x + 6n) + 17(y - 5n) = 0$, esto es,

$$14(x + 6n) = -17(y - 5n),$$

de donde se sigue que 17 divide a $x+6n$. Luego, $x+6n = 17k$ para algún entero k y, por consiguiente, $y - 5n = -14k$. Esto significa que $x = 17k - 6n$ y $y = 5n - 14k$. Como x y y son positivos, tenemos que $\frac{6n}{17} < k < \frac{5n}{14}$. Como k debe ser único (pues

x y y son únicos), es necesario que $\frac{5n}{14} - \frac{6n}{17} = \frac{n}{238} \leq 2$, de donde obtenemos que $n \leq 476$. Si $n = 476$, entonces $\frac{5n}{14} = 170$ y $\frac{6n}{17} = 168$, lo que significa que $k = 169$, dando la única solución $x = 17$ y $y = 14$. Por lo tanto, la respuesta es 476.

3) La respuesta es 28. Sea $a = C_{1010}^{2021}$. Tenemos que

$$a = \frac{2021!}{1010! \times (2021 - 1010)!} = \frac{2021!}{1010! \times 1011!}.$$

Si n es un entero positivo, denotemos por $\nu_2(n)$ al mayor entero no negativo m tal que $2^m \mid n$ y, denotemos por $\nu_3(n)$, al mayor entero no negativo k tal que $3^k \mid n$. Si $x = \frac{y}{zr}$, donde x, y, z, r son enteros positivos, es fácil convencerse de que $\nu_2(x) = \nu_2(y) - \nu_2(z) - \nu_2(r)$ y que $\nu_3(x) = \nu_3(y) - \nu_3(z) - \nu_3(r)$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \nu_2(a) &= \nu_2(2021!) - \nu_2(1010!) - \nu_2(1011!), \\ \nu_3(a) &= \nu_3(2021!) - \nu_3(1010!) - \nu_3(1011!). \end{aligned}$$

Observemos ahora que

$$\begin{aligned} \nu_2(2021!) &= \left\lfloor \frac{2021}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{2^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2021}{2^{10}} \right\rfloor \\ &= 1010 + 505 + 252 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 \\ &= 2013. \end{aligned}$$

De manera análoga, tenemos que

$$\begin{aligned} \nu_2(1010!) &= \left\lfloor \frac{1010}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1010}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1010}{2^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{1010}{2^{9}} \right\rfloor \\ &= 505 + 252 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 \\ &= 1003. \end{aligned}$$

Como 2 no divide a 1011, tenemos que $\nu_2(1011!) = \nu_2(1010!)$. Entonces, $\nu_2(a) = 2013 - 1003 - 1003 = 7$.
Por otro lado, observemos que

$$\begin{aligned} \nu_3(2021!) &= \left\lfloor \frac{2021}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{3^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2021}{3^{6}} \right\rfloor \\ &= 673 + 224 + 74 + 24 + 8 + 2 \\ &= 1005. \end{aligned}$$

De manera análoga, tenemos que

$$\begin{aligned} \nu_3(1010!) &= \left\lfloor \frac{1010}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1010}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1010}{3^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{1010}{3^{6}} \right\rfloor \\ &= 336 + 112 + 37 + 12 + 4 + 1 \\ &= 502 \end{aligned}$$

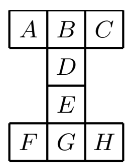
y

$$\begin{aligned}\nu_3(1011!) &= \left\lfloor \frac{1011}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1011}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1011}{3^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{1011}{3^6} \right\rfloor \\ &= 337 + 112 + 37 + 12 + 4 + 1 \\ &= 503.\end{aligned}$$

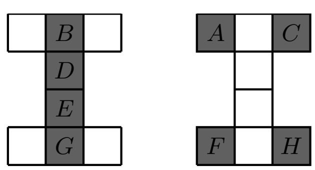
Entonces, $\nu_3(a) = 1005 - 502 - 503 = 0$.
Como a es divisible por $2^M \times 3^N$, los valores posibles de M son $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y el único valor posible de N es 0. Por lo tanto, la suma de los valores posibles de $M + N$ es igual a $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$.

Soluciones del Examen por Equipos

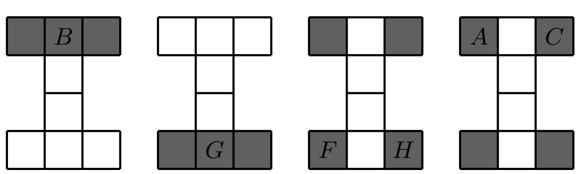
1) Marquemos a los cuadrados como sigue.



Como $B + D + E + G = A + C + F + H$, es fácil ver que la suma buscada es igual a $\frac{(-1)+(-1)+(-1)+0+0+1+1+1}{2} = 0$.



También, $B = F + H$ y $G = A + C$:



Por lo tanto, $B + G = A + C + F + H = 0$.
Caso 1: $B = G = 0$.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & 0 & C \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & D & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & E & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline F & 0 & H \\ \hline\end{array}$$

Observemos que $\{A, C\} = \{D, E\} = \{F, H\} = \{-1, 1\}$. Luego, el número de formas en este caso es igual a $2 \times 2 \times 2 = 8$.
Caso 2: $\{B, G\} = \{-1, 1\}$.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & -1 & C \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & D & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & E & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline F & 1 & H \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & 1 & C \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & D & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & E & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline F & -1 & H \\ \hline\end{array}$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $B = -1$ y $G = 1$. Entonces, $\{A, C\} = \{0, 1\}$, $\{D, E\} = \{-1, 1\}$ y $\{F, H\} = \{0, -1\}$. Luego, el número de formas en este caso es igual a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.
Por lo tanto, la respuesta es $8 + 16 = 24$.

Solución alternativa. Primero marcamos los cuadrados como sigue.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & D & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & E & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline F & G & H \\ \hline\end{array}$$

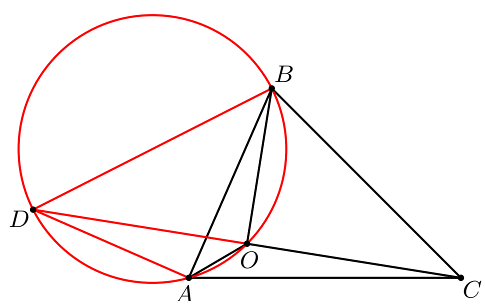
Tenemos que

$$A + B + C = 0, \tag{5}$$
$$B + D + E + G = 0, \tag{6}$$
$$F + G + H = 0, \tag{7}$$
$$A + C + F + H = 0. \tag{8}$$

De (5)+(7)−(8), obtenemos que $B + G = 0$. Sustituyendo esta relación en (6), resulta que $D + E = 0$. Ahora, A, B, C son $1, -1, 0$ en algún orden y, de manera similar, con F, G, H. De lo anterior se sigue que D, E son $-1, 1$ en algún orden, por lo que hay 2 arreglos para D y E. Para cualquiera de los $3! = 6$ arreglos de A, B, C, el valor de $G = -B$ está determinado por el valor de B (que tiene 3 opciones). Entonces, el número de arreglos de F, H es $\frac{6}{3} = 2$. Por lo tanto, en total hay $6 \times 2 \times 2 = 24$ formas de llenar los cuadrados.

2) Observemos que $x^2 + 5xy + y^2 = (x + y)^2 + 3xy$ y $x^2y + xy^2 = (x + y)xy$. Consideremos las sustituciones $s = x + y$ y $p = xy$. Entonces, las primeras dos ecuaciones del sistema dado las podemos escribir como $s^2 + 3p = 7$ y $sp = 2$. Multiplicando la primera ecuación por s, obtenemos que $s^3 + 3sp = 7s$, esto es, $s^3 + 3(2) = 7s$. Luego, $s^3 - 7s + 6 = 0$. Notando ahora que $s = 1$ es una solución de esta ecuación, tenemos que $s - 1$ es un factor de $s^3 - 7s + 6$. Entonces, $(s-1)(s^2+s-6) = 0$, esto es, $(s-1)(s-2)(s+3) = 0$. Como $s = x+y \neq 2$, concluimos que $s = 1$ o $s = -3$.
Si $s = 1$, entonces $p = \frac{2}{s} = 2$, esto es, $x + y = 1$ y $xy = 2$. De la primera relación, obtenemos que $y = 1 - x$. Sustituyendo en la segunda relación, tenemos que $x(1-x) = 2$, esto es, $x^2 - x + 2 = 0$. Como el discriminante de esta ecuación es $(-1)^2 - 4 \times 2 = -7 < 0$, no hay soluciones reales para x y y en este caso.
Si $s = -3$, entonces $p = \frac{2}{s} = -\frac{2}{3}$, esto es, $x + y = -3$ y $xy = -\frac{2}{3}$. De la primera relación, obtenemos que $y = -(3 + x)$. Sustituyendo en la segunda relación, tenemos que $x(3 + x) = \frac{2}{3}$, esto es, $x^2 + 3x - \frac{2}{3} = 0$. Como el discriminante de esta ecuación es $9 - 4 \times (-\frac{2}{3}) > 0$, hay soluciones reales para x y y en este caso.
Concluimos que la única posibilidad es $x + y = -3$ y $xy = -\frac{2}{3}$. Por lo tanto, $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (-3)^2 + 2 \times \frac{2}{3} = \frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}$.

3) Sea D el punto simétrico de C con respecto a BO. Entonces, $\angle BDO = \angle BCO = \angle BAO$. Luego, D está en el circuncírculo del triángulo ABO y $\angle ADO = \angle ABO = \angle CAO$. Por lo tanto, los triángulos DAC y AOC son semejantes.



Entonces, $\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{OC}$, esto es, $\frac{2OC}{AC} = \frac{AC}{OC}$. De aquí obtenemos que $\left(\frac{AC}{OC}\right)^2 = 2$ y, por lo tanto, $OC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ cm.

4) Supongamos que $m - n = p$, donde p es un número primo. Como mn es un cuadrado, tenemos que $mn = n(n + p) = x^2$ para algún entero $x > 0$. Entonces, $4n^2 + 4np = 4x^2$, esto es, $(2n + p)^2 - p^2 = 4x^2$. Factorizando, obtenemos que $(2n - 2x + p)(2n + 2x + p) = p^2$. Como p es primo y $2n - 2x + p < 2n + 2x + p$, necesariamente $2n - 2x + p = 1$ y $2n + 2x + p = p^2$. Sumando estas dos relaciones, obtenemos que $n = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ y, por consiguiente, $m = n + p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$. Como $1000 \leq m < 2021$, tenemos que $64 \leq p + 1 \leq 89$, esto es, $63 \leq p \leq 88$. Como p es primo, los valores posibles de p son $67, 71, 73, 79$ y 83. Por lo tanto, los valores de m que satisfacen el problema son 1156, 1296, 1369, 1600 y 1764.

Solución alternativa. Demostraremos que m y n son primos relativos. Supongamos, por contradicción, que p es un divisor primo de m y n. Entonces, p también es divisor de $m - n$ y, como $m - n$ es primo, necesariamente $m - n = p$. Como $m = pr$ y $n = ps$, tenemos que $p = m - n = p(r - s)$, de donde se sigue que $r - s = 1$. Esto implica que $mn = p^2rs = p^2r(r - 1)$. Como mn es un cuadrado, necesariamente $r(r-1)$ es un cuadrado. Luego, la única posibilidad es $r = 1$ y, por consiguiente, $s = r - 1 = 0$. En consecuencia, $n = 0$ que es una contradicción.
Siendo m y n enteros positivos primos relativos tales que mn es un cuadrado, resulta que cada uno de m y n es un cuadrado. Supongamos que $m = a^2$ y $n = b^2$, donde a y b son enteros positivos. Como $m - n = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ es primo, la única opción posible es $a - b = 1$ y $a + b$ es primo.
Como $31^2 = 961 < 1000$, $1000 < 1024 = 32^2 \leq m = a^2 \leq 44^2 = 1936 < 2021$ y $45^2 = 2025 > 2021$, basta verificar las parejas $(m, n) = (a^2, b^2)$ de la lista $(32^2, 31^2)$, $(33^2, 32^2), \ldots, (44^2, 43^2)$, tales que $a + b$ es primo. Es fácil ver que las parejas que cumplen esto son: $(34^2, 33^2)$, $(36^2, 35^2)$, $(37^2, 36^2)$, $(40^2, 39^2)$ y $(42^2, 41^2)$. Por lo tanto, los valores de m que cumplen las condiciones del problema son: $34^2 = 1156$, $36^2 = 1296$, $37^2 = 1369$, $40^2 = 1600$ y $42^2 = 1764$.

5) Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{15} = A_mA_n &= A_mA_{m+1} + A_{m+1}A_{m+2} + \cdots + A_{n-1}A_n \\ &= \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}.\end{aligned}$$

Utilizando la relación $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ en cada sumando de la igualdad anterior y simplificando, obtenemos que $\frac{1}{15} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{n-m}{mn}$ y, por ende, $m(15 + n) = 15n$. Esto significa que $15 + n$ divide a $15n$ y, por lo tanto, $15 + n$ divide a $15(15+n) - 15n = 225$. De aquí obtenemos que los valores posibles de n son 10, 30, 60 y, los correspondientes valores de m son 6, 10 y 12. En conclusión, el mayor valor posible de $m + n$ es $12 + 60 = 72$.

6) Los números 1, 3, 6 y 8 deben tener diferentes colores entre ellos. Existen $4! = 24$ maneras de pintarlos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que sus colores son rojo, verde, azul y amarillo, respectivamente.
Además, los números 3, 5, 8 y 10 también deben tener colores diferentes, por lo que 5 y 10 deben tener los colores rojo y azul en algún orden.
Como 1 es de color rojo y 6 es de color azul, tenemos que 4 debe ser verde o amarillo. Como 5 y 10 son rojo y azul en algún orden, entonces 7 debe ser verde o amarillo. Como 4 y 7 deben tener colores diferentes, entonces 4 y 7 deben tener colores verde y amarillo en algún orden.
Como 2, 4, 7 y 9 deben tener colores diferentes, entonces 2 y 9 deben ser azul y rojo en algún orden. Pero 6 es de color azul, por lo que 9 debe ser de color rojo y 2 debe ser de color azul. Luego 5 no es azul, por lo que es rojo y 10 es azul.

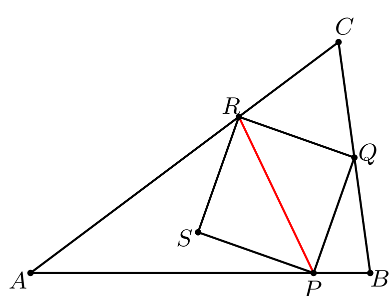
Ahora, 4 y 7 son verde y amarillo en algún orden y se puede ver que cualquier orden es aceptable (solo 3 es verde, solo 8 es amarillo y ninguno de estos números afecta a los colores de 4 o 7). Por lo tanto, hay $2 \times 4! = 48$ diferentes coloraciones.

Solución alternativa. Los números $1, 3, 6$ y 8 deben tener diferentes colores entre ellos. Hay $4! = 24$ maneras de pintarlos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que sus colores son rojo, verde, azul y amarillo, respectivamente.
Además, los números 2, 4, 5 y 7 también deben tener colores diferentes. Nótese que 4 y 5 deben tener colores diferentes, pues 4 solo puede ser verde o amarillo, mientras que 5 solo puede ser rojo o azul.
Observemos que 5 no puede ser azul, pues si lo fuera, entonces 2, 4, 6 y 7 tendría cada uno un color diferente, lo cual indicaría que 9 no se podría colorear. Así, 5 debe ser rojo. Sin importar si 4 es verde o amarillo, 7 no puede ser de color azul, pues de ser así los números 3, 5, 7 y 8 ocuparían cada uno un color diferente, dejando sin opciones de colorear a 10. Luego, 2 debe ser azul.
En cada uno de los casos:

- 4 es verde y 7 es amarillo,
- 4 es amarillo y 7 es verde,

se pueden colorear 9 de rojo y 10 de azul. Por lo tanto, hay $2 \times 4! = 48$ posibles coloraciones.

7) Trazamos PR. Por el teorema del ángulo común, la razón del área de APR a la de ABC es $\frac{50\times 46}{60\times 68} = \frac{115}{204}$. Obsérvese que $BP = AB - AP = 10$, $CR = AC - AR = 22$ y $\frac{BQ}{BC} = \frac{CQ}{BC} = \frac{1}{2}$. Luego, otra vez por el teorema del ángulo común, la razón del área de BPQ a la de ABC es $\frac{10}{60} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$, mientras que la razón del área de CQR a la de ABC es $\frac{22}{68} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{68}$.



Como el área del cuadrado $PQRS$ es el doble del área del triángulo PQR, tenemos que la razón del área de $PQRS$ a la de ABC es

$$2 \times \left(1 - \frac{115}{204} - \frac{1}{12} - \frac{11}{68}\right) = \frac{39}{102} = \frac{13}{34}.$$

8) Denotemos por (X) al área de la figura X. Notemos que

$$\frac{BD}{CD}=\frac{(ABP)}{(ACP)}=\frac{AB\times BP\times \operatorname{sen}\angle ABP}{AC\times CP\times \operatorname{sen}\angle ACP}.$$

Podemos ver que $\angle ABP=180°-\angle ACB$ y, por lo tanto, $\operatorname{sen}\angle ABP=\operatorname{sen}\angle ACB$. De forma similar, obtenemos que $\operatorname{sen}\angle ABP=\operatorname{sen}\angle ACB$. Luego, por la ley de senos en el triángulo ABC, tenemos que $\frac{AB}{\operatorname{sen}\angle ACB}=\frac{AC}{\operatorname{sen}\angle ABC}$. Ahora,

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB\times BP\times \operatorname{sen}\angle ABP}{AC\times CP\times \operatorname{sen}\angle ACP}=\frac{AB}{AC}\times\frac{\operatorname{sen}\angle ACB}{\operatorname{sen}\angle ABC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Por lo tanto, $\frac{AB}{AC}=\sqrt{5}$.

Solución alternativa. Notemos que $\angle ACB+\angle ABP=180°$. Por el teorema del ángulo común, $\frac{(ABC)}{(ABP)}=\frac{AC\times BC}{AB\times BP}$. De forma similar, tenemos que $\frac{(ABC)}{(ACP)}=\frac{AB\times BC}{AC\times CP}$. Ahora, $\frac{(ABP)}{(ACP)}=\frac{(ABP)}{(ABC)}\times\frac{(ABC)}{(ACP)}=\frac{AB\times BP}{AC\times BC}\times\frac{AB\times BC}{AC\times CP}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ pues $BP=CP$. Por otro lado, $\frac{(ABP)}{(ACP)}=\frac{BD}{CD}=5$. Se sigue que $\frac{AB}{AC}=\sqrt{5}$.

9) Sea n el menor número interesante. Observemos que 2 no puede ser un divisor de $2p+1$ para cualquier p, por lo que no hay necesidad de que n sea par. Supongamos que 3 divide a n. Usando el hecho "Si p es un primo divisor de n, entonces $2p+1$ es un divisor de n" repetidamente y concentrándonos en los divisores primos, obtenemos la siguiente sucesión de divisores de n:

$$3\to 7\to 3\times 5\xrightarrow{5} 11\to 23\to 47\to 5\times 19\xrightarrow{19} 3\times 13\xrightarrow{13} 3\times 3\times 3$$

donde "$\xrightarrow{p}$" significa que se utilizó el hecho antes mencionado.
Obviamente la sucesión es circular, esto es, si se continúa desde alguno de los últimos tres 3's (o de cualquier otro número), se obtiene de nuevo la misma sucesión de números. Así, $n=3^3\times 5\times 7\times 11\times 13\times 19\times 23\times 47$ será interesante. Obviamente es el menor número interesante que es divisible por alguno de los números 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23 o 47. Sea m un número interesante que no es divisible por ninguno de los números 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23 o 47. Sea p el menor divisor primo de m. De nuevo usando el hecho "Si p es un divisor primo de m, entonces $2p+1$ es un divisor de m" repetidamente y enfocándonos en los divisores primos, tenemos que

- Si $p=17$: $17\to 5\times 7$, contradicción.
- Si $p=29$: $29\to 59\to 5\times 17$, contradicción.
- Si $p=31$: $31\to 3\times 3\times 7$, contradicción.
- Si $p=37$: $37\to 3\times 5\times 5$, contradicción.
- Si $p=41$: $41\to 83\to 167\to 5\times 67$, contradicción.
- Si $p=43$: $43\to 3\times 29$, contradicción.

Luego, m no puede tener divisores primos menores a 50. Así, todos los divisores compuestos de m deben ser mayores o iguales que p^2 y que 53^2. Ahora, considérese la sucesión:

$$p \to 2p+1 \to 4p+3 \to 8p+7 \to 16p+15 \to 32p+31 \to 64p+63 \to \cdots$$

Esta sucesión continúa hasta que aparece el primer número compuesto (que es al menos p^2). Como $p > 50$, entonces el número compuesto debe aparecer, por lo menos, hasta el 7° término (para obtener un número mayor o igual que p^2).
Entonces, los primeros seis términos son números primos y su producto debe ser un divisor de m. Como $p \geq 53$, este producto será claramente mayor que n, por lo que m será mayor que n. Así, concluimos que n es, en efecto, el número interesante más pequeño, el cual tiene $(3+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 512$ divisores positivos.

10) Sea $T(n)$ la cantidad de maneras de expresar a n como sumas tal cual se describieron. Entonces, $T(2n+1) = T(n)$ pues cualquier representación de un número impar debe tener exactamente un 1 en la posición de unidades (viéndolo en base binaria). Además, $T(2n) = T(n) + T(n-1)$ pues cada representación de $2n$ tiene un cero en la posición de unidades (que se puede hacer de $T(n)$ maneras) o tiene un dos en la posición de unidades (lo cual se puede hacer de $T(n-1)$ maneras). Trabajando en reversa desde 2021, tenemos que

$$\begin{aligned} T(2021) &= T(1010) = T(505) + T(504) = 2T(252) + T(251) \\ &= 2(T(126) + T(125)) + T(125) \\ &\ \vdots \\ &= 17T(7) + 5T(6) \\ &= 22T(3) + 5T(2) = 22 + 10 = 32. \end{aligned}$$

Solución alternativa. En base 2, 2021 se escribe como 11111100101_2. Cuando 2021 es escrito como suma de potencias de 2, donde cada una aparece a lo mucho dos veces, es equivalente a un número binario donde cada dígito es 0, 1 o 2. Cuando tal número se convierte a un número binario con dígitos en $\{0,1\}$, suceden acarreos. Específicamente, para cualquier sucesión de 1s y 2s entre dos 0s. Los 1s después del último "2" no serán cambiados, el último "2" se cambia a un 0, el primer "0" se cambia a un 1, mientras que todos los 1s entre el primer "0" y el último "2" se reducen en 1. El resultado después del acarreo en esas posiciones es una sucesión que empieza en "1" y termina en "0", donde en medio puede suceder cualquier cosa. Cada uno de estos conjuntos de posiciones donde se llevan a cabo los acarreos los llamamos "segmentos". Si al final queremos obtener 11111100101_2, debemos contar de acuerdo al número de segmentos donde se llevan a cabo los acarreos. Si no hay tales segmentos, sólo hay un número. Si existe exactamente un segmento donde se llevan a cabo los acarreos, debemos buscar una subsucesión de 11111100101 que empiece en "1" y termine en "0", donde se puede ver que hay $6+6+7 = 19$ de tales subsucesiones (6 para el primer "0", 6 para el segundo "0" y 7 para el tercero).

Si hay exactamente dos segmentos donde se llevan a cabo tales acarreos, debemos buscar dos de tales subsucesiones. Es claro que la segunda necesariamente debe ser "10", por lo que hay $6+6=12$ elecciones para la primer subsucesión. Por lo tanto, hay en total $1+19+12=32$ números binarios con dígitos en $\{0,1,2\}$ que se transforman en 11111100101_2.

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2022, No. 2

Concursos Estatales: Yucatán, 2022 – 4°, 5° y 6° de Primaria

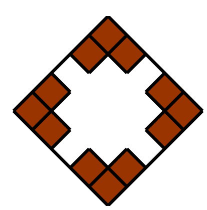
El pasado 5 de febrero de 2022 se llevó a cabo el concurso estatal de la olimpiada mexicana de matemáticas en Yucatán 2022, en los niveles de Primaria, Secundaria y Bachillerato. En el nivel Primaria, participaron estudiantes de $4°$, $5°$ y $6°$ grado, de los cuales fueron seleccionados 21, 19 y 20 estudiantes de cada grado, respectivamente, los cuales fueron invitados a participar en los entrenamientos con los que se seleccionará a la delegación yucateca para participar en el $6°$ concurso nacional de la olimpiada mexicana de matemáticas para educación básica (OMMEB) a realizarse en el mes de junio de forma virtual.
A continuación presentamos los problemas del examen estatal 2022 de la olimpiada mexicana de matemáticas en Yucatán para $4°$, $5°$ y $6°$ de Primaria. Los alumnos tuvieron 2 horas para contestarlo. Al final están las respuestas del examen.

Sección A: Los problemas de esta sección valen 1 punto cada uno.

1. ¿Cuántos números entre 100 y 1000 cumplen que la cifra de las decenas es impar?

2. ¿De cuántas maneras diferentes puedes lograr 240 multiplicando dos números (por ejemplo 24×10)? Nota: 24×10 y 10×24 son un ejemplo de **dos maneras diferentes**.

3. La figura muestra una ventana cuadrada de cristal que mide 30 cm en cada lado. En las esquinas hay adornos de color café con forma de L y el centro es de cristal blanco. ¿Cuánto es el resultado de restar el área de color blanco menos el área de color café?



4. Ocho amigos se reúnen a comer pizza y toman el acuerdo de que todos tienen que pagar la misma cantidad de dinero. Julia olvidó llevar su monedero, por lo que no

puede pagar. Entonces, sus amigos ponen 5 pesos más para completar la parte de Julia. ¿Cuánto se pagó en total por las pizzas?

5. Si las cuatro letras A, B, C y D representan dígitos diferentes y se cumplen la suma y la resta siguientes, ¿cuánto vale D?

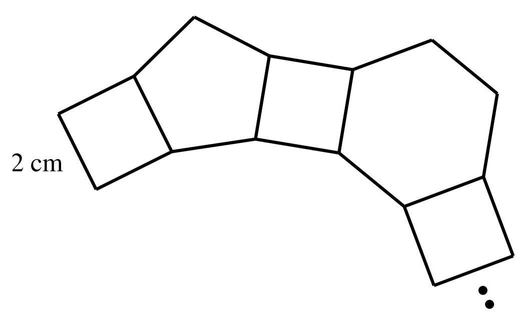
$$\begin{array}{rcc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ + & \mathrm{C} & \mathrm{A} \\ \hline & \mathrm{D} & \mathrm{A} \end{array} \qquad \begin{array}{rcc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ - & \mathrm{C} & \mathrm{A} \\ \hline & & \mathrm{A} \end{array}$$

Sección B: Los problemas de esta sección valen 2 puntos cada uno.

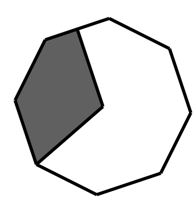
6. Drini está ahorrando. El 1 de febrero, pone 1 peso en una alcancía. El 2 de febrero pone 3 pesos. El 3 de febrero pone 5 pesos. El 4 de febrero pone 7 pesos. ¿Cuánto dinero tendrá después de poner las monedas del 28 de febrero?

7. ¿Cuántos números de 3 cifras cumplen que, si multiplicas sus cifras, el resultado es 24?

8. Imagina que tomas un cuadrado de cartulina cuyo lado mide 2 cm. Le pegas en un lado un pentágono (cinco lados iguales) de cartulina, luego otro cuadrado de cartulina, luego un hexágono (seis lados iguales), luego otro cuadrado, luego un heptágono (siete lados iguales) y sigues pegando hasta llegar a un decágono (diez lados iguales). En la figura te mostramos las primeras 5 piezas que se pegan. ¿Cuál es el perímetro de la figura completa que se forma?



9. Si la figura mostrara un octágono regular que tuviera área de $400\ \text{cm}^2$ y la parte sombreada se forma uniendo el centro con un vértice (esquina) y un punto que está en la mitad de un lado, ¿cuánto valdría el área que queda sombreada?



10. Observa las siguiente serie de figuras. ¿Cuánto sumarán los números en los cuadros de la figura 20, si continúas el patrón?

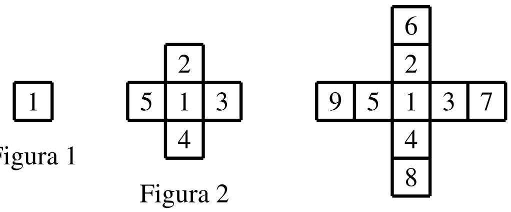
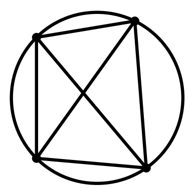


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Sección C: Los problemas de esta sección valen 3 puntos cada uno.

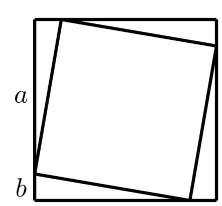
11. Si pones 4 puntos en la orilla de un círculo, como muestra la figura, puedes formar 6 líneas rectas uniéndolos. ¿Cuántas líneas rectas puedes formar si pones 10 puntos en un círculo?



12. Math Vader necesita construir urgentemente una escuela de Matemáticas, así que se dedica a encontrar colegas en todo el planeta que le ayuden a construirla. Los Geometrucos le dicen que pueden construir la escuela en un año. Los Combinatóricos le dicen que la pueden construir en un año y medio. Si en el planeta de Math Vader los años duran 400 días, ¿en cuántos días construirán la escuela los Geometrucos y los Combinatóricos trabajando juntos?

13. Julio va al parque cada 10 días, Víctor va al parque cada 8 días y Bruno cada 6 días. Si se encontraron en el parque hace 9 días, ¿cuántos días faltan para que se vuelvan a encontrar la siguiente vez?

14. En la figura se muestran dos cuadrados, el mayor tiene área 64 cm^2 y el menor tiene área 48 cm^2. ¿Cuánto vale la multiplicación de las medidas marcadas como a y b?



15. A continuación te mostramos dos formas de llenar una cuadrícula de 3×3 con los números $1, 2, 3$, de manera que no haya repeticiones en ningún renglón (horizontal) ni en ninguna columna (vertical). ¿Cuántas maneras diferentes hay en total de llenar la cuadrícula sin que haya repeticiones en renglones o en columnas?

1	2	3
3	1	2
2	3	1

3	2	1
2	1	3
1	3	2

RESPUESTAS

Sección A	Sección B	Sección C
1. 450	6. 784 pesos	11. 45
2. 20	7. 21	12. 240
3. 36 cm^2	8. 94 cm	13. 111
4. 280 pesos	9. 125 cm^2	14. 8 cm^2
5. 9	10. 3003	15. 12

5^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 17 al 21 de junio de 2021 se llevó a cabo de manera virtual, el Concurso Nacional de la 5^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Participaron 117 estudiantes de primaria, representando a 29 entidades federativas y, 149 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

En esta ocasión, los ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos del Nivel III, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas

(IMC), a celebrarse en el verano de 2022.

Los alumnos ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos del Nivel III de la 5^a OMMEB son los siguientes.

Nombre	**Estado**	**Medalla**
Alonso Baeza Quevedo	Baja California Sur	Oro individual
Alan Alejandro López Grajales	Chiapas	Oro individual
Mateo Iván Latapí Acosta	Ciudad de México	Oro individual
Héctor Juan Villarreal Corona	Ciudad de México	Oro individual
Javier Santiago Alfaro González	Ciudad de México	Oro por equipos
Emmanuel Buenrostro Briseño	Jalisco	Oro individual
Angela María Flores Ruiz	Sinaloa	Oro individual

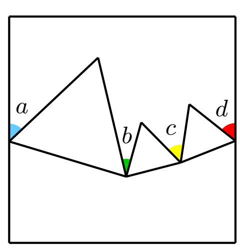
En la prueba por equipos en el Nivel III, la Ciudad de México obtuvo el primer lugar (con 265 puntos), el Estado de Jalisco obtuvo el segundo lugar (con 255 puntos) y el Estado de Sinaloa obtuvo el tercer lugar (con 180 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel III fueron:
Primer lugar: Ciudad de México (con 501 puntos).
Segundo lugar: Jalisco (con 436 puntos).
Tercer lugar: Sinaloa (con 336 puntos).

A continuación presentamos los problemas y soluciones de los exámenes individual y por equipos del Nivel III de la 5^a OMMEB.

Prueba Individual, Nivel III

Parte A

1) En el interior de un cuadrado hay tres triángulos equiláteros como se muestra en la figura. Si la suma de los ángulos a y b es $50°$, ¿cuál es el valor de la suma, en grados, de los ángulos c y d?



2) En una olimpiada participan cinco hermanos: Aldo, César, Hugo, Luis y Saúl. Sus edades son $12, 13, 14, 17$ y 25 años, pero no se sabe quién tiene cada edad. Sin

embargo, se sabe que si sumas la edad de Saúl y la de César, obtienes la edad de Luis, mientras que si sumas la edad de Saúl y la de Aldo, obtienes el doble de la edad de César. ¿Cuál es la edad de Hugo?

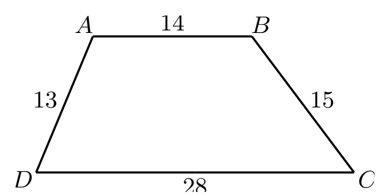
3) Rogelio escribe una lista de los divisores positivos de 10! de menor a mayor. Luego multiplica los números que ocupan los lugares 10 y 261 de su lista. ¿Qué resultado obtiene Rogelio?

4) Carolina planea vender crepas dulces y la forma de prepararlas es acompañarlas con una o dos frutas diferentes y un aderezo. Carolina ha considerado utilizar como aderezo chocolate, cajeta o mermelada de fresa. A ella le gustaría ofrecer a sus clientes al menos 100 tipos de crepas distintas. ¿Cuál es la cantidad mínima de frutas que debe ofrecer Carolina a sus clientes para garantizar al menos 100 tipos de crepas distintas?

5) Ivannia escribió en el pizarrón la siguiente ecuación: $m^2 - n^2 = 2021$. Calcula la suma de todos los posibles valores del último dígito de n^m, tomando en cuenta que m y n son enteros positivos.

6) ¿Cuántos números de siete dígitos hay para los cuales el producto de sus dígitos es 45^3 y la suma de sus dígitos no es un número primo?

7) Sea $ABCD$ un trapecio con AB paralela a CD, $AB = 14$ cm, $BC = 15$ cm, $CD = 28$ cm y $DA = 13$ cm. Encuentra el área, en cm^2, de $ABCD$.



8) La taquería "*El taco matemático*" tiene dos promociones: Promo100, donde son tres órdenes de tacos por 100 pesos, y Promo70, donde son dos órdenes de tacos por 70 pesos. Matilde quiere hacer una fiesta y quiere minimizar el dinero que gastará en los platillos. Si ella quiere pedir exactamente 31 órdenes de tacos, ¿cuánto es lo menos que puede gastar en pesos?

9) Determina cuántos enteros positivos a menores que 10000, satisfacen que $1010a - 1011$ es múltiplo de 2021.

10) Se tiene un cubo con sus caras pintadas de 6 colores distintos, una de cada color. Cada cara se separa en 4 cuadrados iguales trazando líneas perpendiculares a sus lados que pasen por sus centros. En los 24 cuadrados que resultan de la división, se acomodan los números del 1 al 24 de manera que después de colocarlos todos, la suma de cada 3 números cuyos cuadrados tienen un vértice en común y este sea un vértice del cubo sea múltiplo de 3 y, además, cada dos números cuyos cuadrados estén en la misma cara del cubo y estos compartan un lado sumen también un múltiplo de 3. Si el número de formas de realizar este acomodo se puede expresar

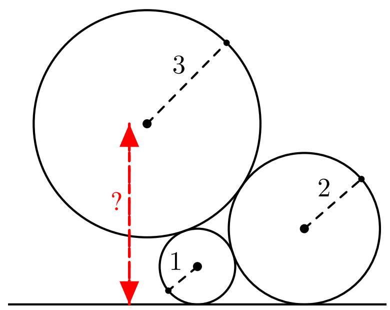
de la forma $a \cdot (b!)^c$ donde a, b y c son enteros positivos tales que a no es divisible por el cuadrado de ningún número primo, determina el valor de $a + b + c$.

11) Los números reales positivos x, y, z satisfacen

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{5x} = \frac{z+x}{2y}.$$

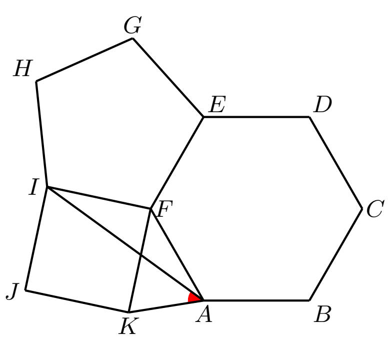
Si el valor de la expresión $\frac{x+2y}{3z}$ se puede escribir de la forma $\frac{m}{n}$ con m y n enteros positivos cuyo máximo común divisor es igual a 1, encuentra $m + n$.

12) En la figura se observan dos circunferencias de radios 1 cm y 2 cm tangentes a una recta horizontal. Una tercera circunferencia de radio 3 cm es tangente a las otras dos circunferencias. ¿A qué distancia, en centímetros, se encuentra el centro de la tercera circunferencia de la recta horizontal?



Parte B

13) La siguiente figura muestra un hexágono regular cuyos vértices son A, B, C, D, E, F, un pentágono regular cuyos vértices son E, G, H, I, F, y un cuadrado cuyos vértices son I, F, K, J. ¿Cuánto mide, en grados, el ángulo $\angle KAI$?



14) David, Américo y Nicho tienen 12, 13 y 14 años, respectivamente. Al inicio, cada uno de ellos tiene un número. Por turnos, siguiendo el orden de acuerdo a su edad del menor al mayor, juegan al “Oportuno veinte veintiuno” que consiste en, durante su turno, elegir y hacer uno de los siguientes movimientos:

- Restar 3 a su número.
- Multiplicar por 7 su número y al resultado sumarle 9.
- Multiplicar por 4 su número y al resultado restarle 3.

Gana el primero que obtenga como resultado el número 2021. Si cada uno comienza con el número de su edad, ¿quién ganará?

15) Los números reales x, y, z, N cumplen las siguientes ecuaciones:

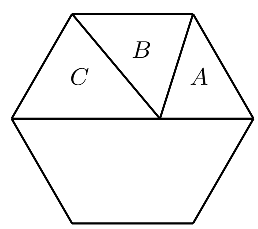
$$x + y + z = 3,$$

$$N = x^2y^2 + 4z = y^2z^2 + 4x = z^2x^2 + 4y.$$

Encuentra todos los posibles valores de N.

Prueba por Equipos, Nivel III

1) En la figura se observa un hexágono regular y una diagonal entre dos vértices opuestos. El área del triángulo B resulta de multiplicar por n el área del triángulo A. El área del triángulo C resulta de multiplicar por m el área del triángulo A. Determina el valor de $2n - m$.



2) Un número de 5 dígitos $\overline{abcde}$ es *fósil* si cumple las siguientes condiciones:

- El número $\overline{ab}$ es múltiplo de 2.
- El número $\overline{abc}$ es múltiplo de 3.
- El número $\overline{abcd}$ es múltiplo de 4.
- El número $\overline{abcde}$ es múltiplo de 5.

Por ejemplo, el número 10245 es fósil porque 10 es múltiplo de 2, 102 es múltiplo de 3, 1024 es múltiplo de 4 y 10245 es múltiplo de 5. ¿Cuántos números fósiles hay?

3) Sean a y c números reales diferentes de cero y diferentes entre sí, tales que

$$a + \frac{4}{a} = c + \frac{4}{c}.$$

Determina el valor del producto ac.

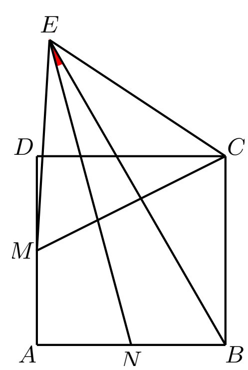
4) Encuentra el mayor entero positivo n tal que 7^n divide a

$$49 \cdot 1 \cdot 1! + 49 \cdot 2 \cdot 2! + 49 \cdot 3 \cdot 3! + \cdots + 49 \cdot 49 \cdot 49!.$$

(NOTA: Si n es un entero positivo, entonces $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. Por ejemplo, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$).

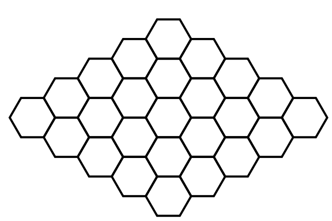
5) Ángel escribe en un pizarrón exactamente una vez cada uno de los números de la forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 8$. Por ejemplo, uno de esos números que escribe es $-1+2-3+4-5+6+7+8 = 18$. Determina la cantidad de números positivos que escribe Ángel.
NOTA: *si más de una expresión de la forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 8$ da el mismo resultado positivo, entonces ese resultado se cuenta tantas veces como la cantidad de expresiones que dan dicho resultado.*

6) En la siguiente figura, se tiene un cuadrado $ABCD$ y un triángulo equilátero CME, donde M es el punto medio del segmento AD. Sea N el punto medio de AB. Encuentra la medida, en grados, del ángulo $\angle NEB$.



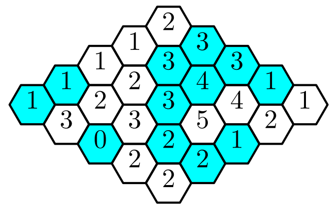
7) Considera todos los números enteros de 7 dígitos que se forman con los dígitos 1, 2 y 3 de manera que el 3 aparezca exactamente 2 veces. ¿Cuántos de tales enteros son divisibles entre 11?

8) Roberto y Tomás colorean por turnos los hexágonos del siguiente tablero. Empieza Roberto y terminan una vez que hayan coloreado 12 hexágonos en total. Después escriben en cada hexágono la cantidad de hexágonos coloreados con los que comparten un lado y por último suman todos los números de los hexágonos. Si la suma total del tablero es múltiplo de 5, entonces gana Tomás, de otra forma gana Roberto.



¿Quién tiene la estrategia ganadora y cuál es?

Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra cómo terminaría una posible partida.



En este caso la suma es 54, por lo que ganó Roberto.

Soluciones de la Prueba Individual, Nivel III

1) La respuesta es $130°$. Consideremos el hexágono formado por los dos vértices superiores del cuadrado y los cuatro vértices en los que están los ángulos marcados. La suma de los ángulos internos de este hexágono es igual a $4(180°)$. Sin embargo, esta misma suma se puede expresar como la suma de los 2 ángulos rectos en los vértices del cuadrado, de los 6 ángulos de $60°$ en los triángulos equiláteros y de los ángulos marcados. Es decir, si S es la suma de ángulos buscada, entonces

$$2\,(90°) + 3\,(120°) + S + 50° = 4\,(180°)\,,$$

de donde obtenemos que $S = 130°$.

2) La respuesta es 17. Para cada uno de los hermanos, su edad se denotará por la primera letra de su nombre. Así, tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} s + c &= \ell, \\ s + a &= 2c. \end{aligned}$$

De la primera, como cada una de las posibles edades es mayor a 10, entonces $\ell >$ 20, por lo que $\ell =$ 25 y, por ende, s y c son, en algún orden, 12 y 13. Si $c =$ 12, entonces $s + a =$ 26 con $s =$ 13, por lo que $a =$ 13, lo cual es imposible. Esto implica que $c =$ 13 y $s =$ 12, de donde se obtiene que $a =$ 14 y, por lo tanto, $h =$ 17.

3) La respuesta es $10! = 3628800$. Factorizando, obtenemos que

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7,$$

por lo que 10! tiene $(8 + 1)(4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) =$ 270 divisores positivos.
Ordenando los divisores de menor a mayor, tenemos que el producto de cada pareja de elementos en posiciones 1 y 270, 2 y 269, 3 y 268, …, 10 y 261, es igual a 10!. Así, el resultado de Rogelio es $10! = 3628800$.

4) La respuesta es 8. Tomando en cuenta que la crepa se acompaña de un aderezo, podemos concluir que la cantidad total de crepas que se pueden ofrecer es tres veces la cantidad de crepas diferentes con un aderezo en particular. Si hay n frutas, entonces se pueden preparar n crepas acompañadas de una fruta y $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ crepas acompañadas de dos frutas. Así, buscamos el menor valor posible de n tal que
$$3\left(n + \frac{n(n-1)}{2}\right) > 100.$$
En este caso, el menor valor de n que cumple lo anterior es $n = 8$.

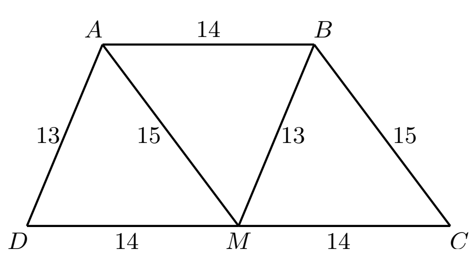
5) La respuesta es 2. De la ecuación dada, tenemos que $(m+n)(m-n) = 2021$. Además, $2021 = 43 \cdot 47$. Como $0 < m - n < m + n$, hay únicamente dos opciones:

   - $m - n = 43$ y $m + n = 47$. De aquí obtenemos que $m = 45$ y $n = 2$. Así, buscamos el último dígito de 2^{45}. Considerando que $2^1 \equiv 2 \pmod{10}$, $2^2 \equiv 4 \pmod{10}$, $2^3 \equiv 8 \pmod{10}$, $2^4 \equiv 6 \pmod{10}$, $2^5 \equiv 2 \pmod{10}$ y $45 \equiv 1 \pmod 4$, concluimos que $2^{45} \equiv 1 \pmod{10}$.
   - $m - n = 1$ y $m + n = 2021$. Luego, $m = 1011$ y $n = 1010$. El último dígito de 1010^{1011} claramente es 0.

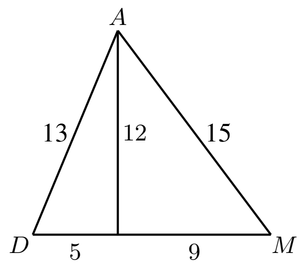
   Por lo tanto, la suma de todos los posibles valores del último dígito de n^m es $2+0 = 2$.

6) La respuesta es 210. Tenemos que $45^3 = 3^6 \cdot 5^3$. Así, tres de las cifras del número tienen que ser iguales a 5. Las cuatro restantes solo pueden ser 1, 3 o 9, y su producto debe ser 3^6. Las únicas opciones para lograr esto es que los cuatro dígitos restantes sean 9, 9, 3 y 3, o 9, 9, 9 y 1, en algún orden.
   En el primer caso, la suma de las cifras es igual a 39, el cual no es un número primo. En este caso hay $\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = 210$ números.
   En el segundo caso, la suma de las cifras es igual a 43, el cual sí es un número primo.
   Por lo tanto, en total hay 210 números.

7) La respuesta es 252. Sea M el punto medio de CD. Tenemos que $DM = MC = 14 = AB$, lo cual implica que $ABMD$ es un paralelogramo con $AM = BC = 15$ y $BM = AD = 13$. Por lo que el área de $ABCD$ es el triple del área de un triángulo de lados 13, 14 y 15.

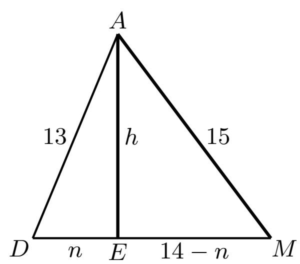


Como ese triángulo se puede construir con dos triángulos de lados 13, 12, 5 y 15, 12, 9, tiene altura 12 y área 84.



Por lo tanto, el área de $ABCD$ es igual a $84 \times 3 = 252$.

Solución alternativa. Consideremos el triángulo ADM y tracemos su altura AE desde el vértice A y sean $h = AE$, $n = DE$ y $EM = 14 - n$ como se muestra en la figura.



Entonces, por el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos AED y AEM, tenemos que $13^2 - n^2 = h^2 = 15^2 - (14-n)^2$, de donde $(14-n)^2 - n^2 = 15^2 - 13^2$, esto es, $14^2 - 28n = (15+13)(15-13) = 28(2)$. De aquí, obtenemos que $28n = 14^2 - 2(28) = 2(7)(14) - 2(28) = 7(28) - 2(28) = (7-2)(28) = 5(28)$, de donde se sigue que $n = 5$. Por lo tanto, $DE = n = 5$, $EM = 14 - n = 9$, $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ y el área de $ABCD$ es igual a $84 \times 3 = 252$.

8) La respuesta es 1040. Denotemos por m y n al número de Promo100 y Promo70, respectivamente. Sabemos entonces que $3m + 2n = 31$. Buscamos minimizar $100m + 70n$. Observemos que

$$100m + 70n = 105m + 70n - 5m = 35(3m + 2n) - 5m = 35 \cdot 31 - 5m,$$

por lo que, para minimizar $100m + 70n$, basta maximizar m. Como $3m + 2n = 31$, tenemos que $m = \frac{31-2n}{3}$. Al querer maximizar m, se quiere minimizar n. Es claro que para $n = 0$ y $n = 1$ no se obtiene un valor entero de m. Para $n = 2$ obtenemos que $m = \frac{31-2(2)}{3} = 9$, donde $3(9) + 2(2) = 31$. Por lo tanto, lo menos que puede gastar Matilde es $100(9) + 70(2) = 1040$ pesos.

9) La respuesta es 4. Sea a un entero positivo menor que 10000. Si $1010a - 1011$ es múltiplo de 2021, entonces $1010a - 1011 = 2021x$ para algún entero x, esto es, $1010a = 2021x + 1011$. Si multiplicamos esta ecuación por 2 y reducimos módulo 2021, obtenemos que $-a \equiv 1 \pmod{2021}$. Esto significa que $a = 2021t - 1$ para algún entero t.
Si $t \leq 0$, entonces $a \leq -1$, así que no hay soluciones en este caso.
Si $t \geq 5$, entonces $a \geq 2021(5) - 1 = 10104 > 10000$, así que no hay soluciones en este caso.
Si $t = 1, 2, 3$ o 4, entonces $a = 2021, 4041, 6062$ o 8083, respectivamente, los cuales satisfacen la condición del problema.
Por lo tanto, solo hay 4 posibles valores de a.

10) La respuesta es 17. Analizando una esquina, podemos observar que tres cuadros que comparten una esquina deben tener números que tengan todos sus residuos módulo 3 iguales o todos distintos. De analizar las caras del cubo notamos que al saber el residuo módulo 3 de un número en algún cuadro, las congruencias de sus vecinos quedan determinadas (al haber un único residuo que sume 0 con el del cuadro), determinando así las congruencias de toda su cara.
Si se toma una cara con una casilla que tiene un número divisible por 3, todos los números en esa cara serán divisibles por 3. Ninguna de las caras vecinas a esta pueden tener un múltiplo de 3, puesto que las esquinas que comparten indicarían que las otras dos caras adyacentes a ambas tienen todas sus casillas con múltiplos de 3, a pesar de solo haber 8 múltiplos de 3 entre 1 y 24. Así, los múltiplos de 3 estarán en dos caras opuestas y cada una de las demás caras tendrá en un patrón de ajedrez números congruentes a 1 o 2 módulo 3.
Hay 3 formas de elegir las dos caras opuestas que tendrán a los múltiplos de 3, luego hay 2 formas de escoger el patrón de ajedrez de números congruentes a i módulo 3 para cada $i = 0, 1, 2$. Esto resulta en un total de $6 \times (8!)^3$ acomodos posibles. Por lo tanto, la respuesta es $6 + 8 + 3 = 17$.

11) La respuesta es 14. Si a, b, c y d son números reales tales que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad + cd = bc + cd$, por lo que $\frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. En el problema, tenemos que

$$\frac{3x + 3y}{3z} = \frac{y + z}{5x} = \frac{2z + 2x}{4y},$$

de donde, usando lo mencionado al principio,

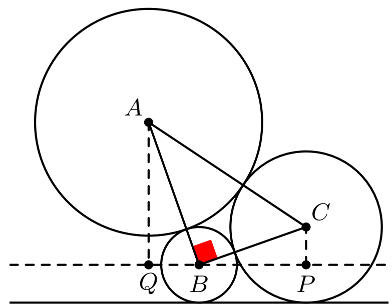
$$\frac{3x + 3y}{3z} = \frac{(3x + 3y) + (y + z) + (2z + 2x)}{3z + 4y + 5x} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\frac{x + y}{z} = \frac{y + z}{5x} = \frac{z + x}{2y} = 1,$$

lo que implica que $x + y = z$. Usando esto en $\frac{y+z}{5x} = 1$, obtenemos que $\frac{x+2y}{5x} = 1$. Por consiguiente, $y = 2x$, lo que indica que $z = 3x$. Por lo tanto, $\frac{x+2y}{3z} = \frac{x+4x}{9x} = \frac{5}{9}$, de donde se concluye que la respuesta es $5 + 9 = 14$.

12) La respuesta es $\frac{8\sqrt{2}}{3} + 1 \approx 4.76$. Sean A, B y C los centros de las circunferencias (como se muestra en la figura). Observemos que el triángulo ABC tiene lados de longitudes 3 cm, 4 cm y 5 cm, por lo que es un triángulo rectángulo.
Tracemos la recta que pasa por B y que también es paralela a la recta horizontal. Luego tracemos las perpendiculares AQ y CP como se observa en la figura.



Ahora notemos que $\angle CBP = 90° - \angle QBA = \angle BAQ$ por lo que los triángulos AQB y BPC son semejantes. En el triángulo BPC tenemos que $BC = 3$ cm y $CP = 1$ cm, por lo que, por Pitágoras, resulta que $BP = \sqrt{8}$ cm. De la semejanza anterior obtenemos que $\frac{AB}{BC} = \frac{AQ}{BP}$, de donde $AQ = \frac{4\sqrt{8}}{3}$ cm. Finalmente, la distancia de A a la recta horizontal es $AQ + 1 = \frac{4\sqrt{8}}{3} + 1 = \frac{8\sqrt{2}}{3} + 1 \approx 4.76$ cm.

Parte B

13) Primero, observemos que $AF = KF = IF$, por lo que F es el circuncentro del triángulo KAI. Como $\angle KFI = 90°$, entonces $\angle KAI = \frac{1}{2}\angle KFI = \frac{1}{2}(90°) = 45°$.

14) Notemos que los tres movimientos no alteran el residuo módulo 3 del número de cada uno. Como $2021 \equiv 14 \pmod 3$, el único que puede ganar es Nicho. La siguiente sucesión de movimientos muestra que, en efecto, puede ganar:

$$14 \to 11 \to 86 \to 83 \to 80 \to 77 \to 74 \to 71 \to 506 \to 2021.$$

15) De las igualdades dadas tenemos que $x^2y^2 + 4z = y^2z^2 + 4x$, lo cual implica que $x^2y^2 - y^2z^2 = 4x - 4z$, esto es, $y^2(x^2 - z^2) = 4(x - z)$. Si $x \neq z$, de la última ecuación y de la primera ecuación dada obtenemos que $4 = y^2(x+z) = y^2(3-y)$. Esto se puede reescribir como $0 = y^3 - 3y^2 + 4 = (y-2)^2(y+1)$. Se sigue que, si $x \neq z$, entonces $y = -1$ o $y = 2$. Análogamente, si $x \neq y$, entonces $z = -1$ o $z = 2$, y si $y \neq z$, entonces $x = -1$ o $x = 2$.
Por consiguiente x, y y z no pueden ser todos diferentes. En efecto, asumiendo que sí, se obtiene una contradicción pues se tendría que x, y y z serían cada uno -1 o 2, lo cual por el principio de las casillas, implica que hay dos iguales. De aquí se tienen dos casos.

- Si dos de x, y y z son iguales y el otro es diferente, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x \neq y$ y $y = z$. Así, se tiene que $z = -1$ o $z = 2$.
  Si $z = -1$, entonces $y = -1$ y $3 = x + y + z = x - 2$, por lo que $x = 5$. Es claro que estos valores cumplen las ecuaciones dadas. Así, se obtiene que $N = (-1)^2(-1)^2 + 4(5) = 21$.
  Si $z = 2$, entonces $y = 2$ y $3 = x + y + z = x + 4$, por lo que $x = -1$. Estos valores cumplen las ecuaciones dadas. Se llega a que $N = (2)^2(2)^2 + 4(-1) = 12$.
- Si $x = y = z$, de la primera ecuación dada se concluye que $x = y = z = 1$, valores que claramente cumplen las ecuaciones dadas. Así, $N = (1)^2(1)^2 + 4(1) = 5$.

Por lo tanto, los únicos valores posibles de N son 5, 12 y 21.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel III

1) Sin pérdida de generalidad, supongamos que la base del triángulo A mide 1 cm. Como los triángulos A, B y C tienen la misma altura (vertical), entonces la razón entre áreas es igual a la razón entre bases. Esto indica que la base del triángulo B (que es igual al lado del hexágono), es igual a n y la base del triángulo C es igual a m. Como el hexágono de la figura es regular, entonces su diagonal principal mide el doble del lado del hexágono, por lo que $m + 1 = 2n$, esto es, $2n - m = 1$.

   Solución alternativa. Sea h la distancia entre la diagonal principal trazada del hexágono (cuya longitud se denota por d) y el lado horizontal superior del hexágono (cuya longitud se denota por ℓ). Tenemos que $d = 2\ell$, pues el hexágono es regular. Entonces, el área del triángulo B es igual a $\frac{1}{2}h\ell$, mientras que el área del trapecio formado por los triángulos A, B y C es igual a $\frac{1}{2}(h)(3\ell) = \frac{3}{2}h\ell$. Si a denota el área del triángulo A, entonces $a + an + am = \frac{3}{2}h\ell$ y $an = \frac{1}{2}h\ell$, por lo que $a + am = h\ell$. Se sigue que
   $$\frac{1+m}{n} = \frac{a+am}{an} = \frac{h\ell}{\frac{1}{2}h\ell} = 2,$$
   de donde $1 + m = 2n$, esto es, $2n - m = 1$.

2) Por el criterio de divisibilidad del 4, para que $\overline{abcd}$ sea múltiplo de 4, debemos tener que $\overline{cd}$ es múltiplo de 4. Como hay 25 múltiplos de 4 que se pueden formar con dos dígitos, tenemos 25 maneras de elegir al número $\overline{cd}$.
   Para que $\overline{ab}$ sea múltiplo de 2, b debe ser par. Por lo tanto, tenemos 5 maneras de elegir al dígito b.
   Para que $\overline{abc}$ sea múltiplo de 3, por el criterio de divisibilidad del 3 debemos tener que $a + b + c$ es múltiplo de 3. Si $b + c$ es $3, 6, 9, 12, 15$ o 18, entonces a debe ser $3, 6$ o 9. Si $b + c$ es $4, 7, 10, 13$ o 16, entonces a debe ser $2, 5$ u 8. Si $b + c$ es $2, 5, 8, 11, 14$ o 17, entonces a debe ser $1, 4$ o 7. En cualquier caso, a siempre tiene 3 opciones.
   Finalmente, para que $\overline{abcde}$ sea múltiplo de 5, e debe ser 0 o 5, esto es, e tiene 2

opciones.
En total hay $25 \times 5 \times 3 \times 2 = 750$ números fósiles.

3) La igualdad dada implica que $a - c = \frac{4}{c} - \frac{4}{a} = \frac{4(a-c)}{ac}$. Como a y c son diferentes, tenemos que $a - c \neq 0$ y, de la última ecuación, concluimos que $ac = 4$.

4) Si k es un entero positivo, entonces $k \cdot k! = k!\,[(k+1) - 1] = (k+1)! - k!$ Usando esta relación y llamando S a la suma $49 \cdot 1 \cdot 1! + 49 \cdot 2 \cdot 2! + \cdots + 49 \cdot 49 \cdot 49!$, tenemos que

$$\begin{aligned} S &= 49\,(1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + 49 \cdot 49!) \\ &= 49[(2! - 1!) + (3! - 2!) + \cdots + (50! - 49!)] = 49\,(50! - 1!)\,. \end{aligned}$$

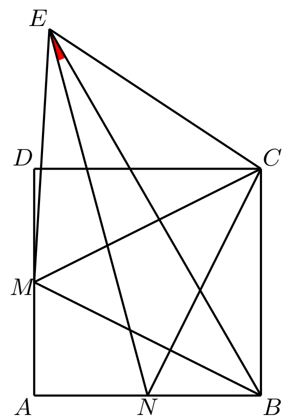
Como $49 \mid 50!$, tenemos que $\text{mcd}(49, 50! - 1) = 1$, por lo que 7 no divide a $50! - 1$. Así, los únicos factores 7 de $49(50! - 1)$ son los factores 7 de 49, de los cuales hay 2.

5) El número total de números escritos por Ángel es $2^8 = 256$, por la diferente elección de signo de los 8 números. Notemos que la cantidad de números positivos es igual a la cantidad de números negativos, pues si una expresión da como resultado un número positivo, invirtiendo los signos de los 8 números que pertenecen a la operación se obtiene un número negativo (que corresponde al número positivo mencionado anteriormente), por lo que basta enfocarse en aquellas expresiones cuyo resultado es 0. Para eso, los números del 1 al 8 se dividen en dos conjuntos A y B dependiendo de cuáles serán positivos (conjunto A) y cuáles serán negativos (conjunto B). Como el 8 pertenece a alguno de los dos conjuntos, sin pérdida de generalidad se puede asumir que está en A y multiplicar por 2 la cantidad de formas que se obtengan.
La suma de ambos conjuntos debe ser la misma. Como la suma de los 8 números es $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$, en cada conjunto se debe sumar 18, por lo que una vez puesto el 8 en A, el resto de los números de A deben sumar $18 - 8 = 10$. Así, obtenemos las siguientes posibilidades:

$$8, 1, 2, 3, 4; \quad 8, 7, 2, 1; \quad 8, 6, 3, 1; \quad 8, 5, 3, 2; \quad 8, 5, 4, 1; \quad 8, 7, 3; \quad 8, 6, 4.$$

Son 7 posibilidades si 8 está en A, por lo que Ángel escribe $7 \cdot 2 = 14$ veces el número 0 en el pizarrón. Por lo tanto, la cantidad de resultados positivos es $\frac{256-14}{2} = 121$.

6) Observemos que $CN = CM = MB$, pues los tres segmentos son hipotenusas de triángulos rectángulos cuyos catetos cumplen que uno de ellos es igual al lado del cuadrado y el otro es igual a la mitad del lado del cuadrado. Más aún, por este argumento, tenemos que los triángulos AMB y BNC son congruentes, por lo que $\angle MBN = \angle NCB$. Como $\angle CBN = 90°$, concluimos que los segmentos CN y MB son perpendiculares.



Sean $\alpha = \angle MEN$ y $\beta = \angle BEC$. De la construcción de la figura, como $ME = MC = MB$ y $CE = CM = CN$, tenemos que M y C son los circuncentros de los triángulos ECB y EMN, respectivamente. Esto significa que $\angle BMC = 2\angle BEC = 2\beta$ y $\angle MCN = 2\angle MEN = 2\alpha$. Como MB y CN son perpendiculares, entonces $\angle BMC + \angle MCN = 90°$. Esto quiere decir que $2\alpha + 2\beta = 90°$ y, por consiguiente, $\alpha + \beta = 45°$. Por lo tanto,

$$\angle NEB = \angle MEC - (\angle MEN + \angle BEC) = 60° - (\alpha + \beta) = 60° - 45° = 15°.$$

7) Sea $n = abcdefg$ uno de los números buscados. Por el criterio de divisibilidad del 11, $x = a + c + e + g - (b + d + f)$ debe ser múltiplo de 11. Observemos que el valor mínimo de x es $(1 + 1 + 1 + 1) - (3 + 3 + 2) = -4$, mientras que el valor máximo de x es $(3 + 3 + 2 + 2) - (1 + 1 + 1) = 7$, por lo que $x = 0$ es el único valor posible.
Sea $y = a + c + e + g = b + d + f$. Luego, la suma de los dígitos de n es $2y$. Observemos que el valor mínimo de $2y$ es $3+3+1+1+1+1+1 = 11$ y el valor máximo de $2y$ es $3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16$, de donde se sigue que y puede ser 6, 7 u 8.

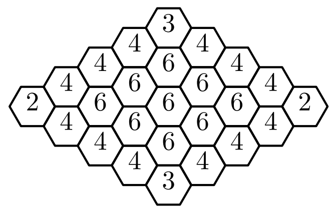
- Si $y = 6$, entonces no puede suceder que dos de los dígitos b, d y f sean 3, al igual que con a, c, e y g. Entonces, dos de los dígitos b, d y f suman 3, lo que implica que $\{b, d, f\} = \{3, 2, 1\}$, los cuales se pueden ordenar de $3! = 6$ formas. Como tres de los dígitos a, c, e y g suman 3, entonces esos tres tienen que ser iguales a 1 y el otro igual a 3, dando un total de $4 \cdot 6 = 24$ números en este caso.
- Si $y = 7$, como $b + d + f = 7$, entonces b, d, f deben ser 1, 3, 3 (en algún orden) o 2, 2, 3 (en algún orden). En el primer caso, como $a + c + e + g = 7$ y ninguno es 3, se tiene que tres de los dígitos deben ser 2 y el otro es 1, dando $3 \cdot 4 = 12$ números. En el segundo caso, uno de los números a, c, e, g es 3 y los demás suman 4, por lo que los dígitos a, c, e, g son 1, 1, 2, 3 en algún orden,

dando $3 \cdot \binom{4}{2}\binom{2}{1} = 36$ números. Así, en este caso hay un total de $12+36 = 48$ números que cumplen.

- Si $y = 8$, como $b + d + f = 8$, la única opción es que b, d, f sean 2, 3, 3 en algún orden. Además, como $a + c + e + g = 8$ y ninguno es 3, entonces $a = c = e = g = 2$. Se sigue que solo hay 3 números en este caso.

Por lo tanto, en total hay $24 + 48 + 3 = 75$ números.

8) Tomás tiene estrategia ganadora. Para ver esto, observemos que cada vez que se colorea un hexágono, la suma aumenta en la cantidad de hexágonos que lo rodean, de modo que al considerar la cantidad de hexágonos que rodean a cada celda, se obtiene un tablero como el que se muestra.



La estrategia es como sigue. Si Roberto colorea uno que tenga un 3, Tomás colorea uno que tenga un 2 y viceversa. Lo mismo sucede con las celdas de 6 y 4: si Roberto escoge una que tenga un 6, Tomás puede colorear una con un 4 y viceversa.
Como hay tantas celdas con un 3 como celdas como un 2, además de que hay doce celdas con un 4 y nueve celdas con un 6, la estrategia de Tomás sí se puede llevar a cabo pues se tomarán a lo mucho seis celdas con un 4 y a lo mucho seis celdas con un 6.
Como Tomás solo está escogiendo números de manera que, después de su turno, la suma sea un múltiplo de 5, la suma al final del juego deberá de ser múltiplo de 5.

TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2022, No. 3

6ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 9 al 12 de junio de 2022 se llevó a cabo de manera virtual, el Concurso Nacional de la 6^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Participaron 115 estudiantes de primaria y 145 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

En esta ocasión, los ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos en cada nivel junto con los ganadores de medalla de plata en la prueba individual del Nivel I, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos

que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2023.

Los alumnos ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos, así como los ganadores de medalla de plata en la prueba individual del Nivel I del Concurso Nacional de la 6^a OMMEB son los siguientes.

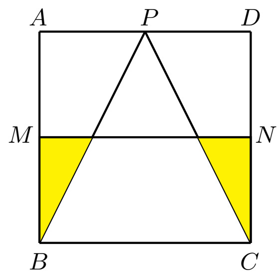
Nombre	**Estado**	**Medalla**
Elisa María Villarreal Corona	Ciudad de México	Oro individual
Kathya Anette Puig Nolasco	Veracruz	Oro individual
Andrea María Torres Martínez	San Luis Potosí	Oro individual
Samuel Ramírez Venegas	Jalisco	Oro individual
Fernando Gael Martín Barajas	Ciudad de México	Oro individual
Ignacio Ostos Aponte	Nuevo León	Oro individual
Axel Ahtziri Ibáñez Chávez	Zacatecas	Oro individual
Danna Andrade García	Coahuila	Oro por equipos
Emmanuel López Terrones	Coahuila	Oro por equipos
Niza Daniela Sierra Jasso	Coahila	Oro por equipos
María Jaqueline Nava Morales	Hidalgo	Plata
Renata Isabella Pérez Lara	Hidalgo	Plata
Ivanna Corina Márquez Macías	Hidalgo	Plata
Josué Francisco De la Fuente Jiménez	Nuevo León	Plata
Alethia Yobely Cepeda Obregón	San Luis Potosí	Plata
José Andrés Martínez Salazar	San Luis Potosí	Plata
Sebastián Preciado Molina	Sonora	Plata
Rogelio Tadeo Guarneros Mata	Tamaulipas	Plata
Juan Carlos Barragán Domínguez	Veracruz	Plata
José Antonio Bernal Massa	Yucatán	Plata
Dereck Orlando Romo Rodríguez	Zacatecas	Plata
Iker Medina Ortega	Zacatecas	Plata

En la prueba por equipos en el Nivel I, el Estado de Coahuila obtuvo el primer lugar (con 190 puntos), la Ciudad de México obtuvo el segundo lugar (con 180 puntos) y el Estado de Chiapas obtuvo el tercer lugar (con 145 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel I fueron:
Primer lugar: Ciudad de México (con 285 puntos).
Segundo lugar: Coahuila (con 245 puntos).
Tercer lugar: Zacatecas (con 231 puntos).

A continuación presentamos los problemas y soluciones de los exámenes individual y por equipos del Nivel I del Concurso Nacional de la 6^a OMMEB.

Prueba Individual, Nivel I

1) El cuadrado $ABCD$ que se muestra en la figura tiene lado 8 y se tiene que M, N y P son los puntos medios de los lados AB, CD y DA, respectivamente. ¿Cuánto vale el área sombreada?



2) ¿Cuántos números primos, de dos dígitos, pueden escribirse como la suma de dos números primos?

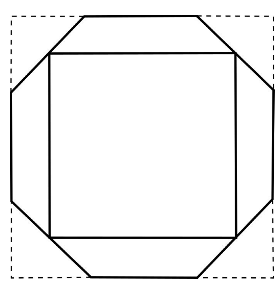
3) Denisse sumó 5 números enteros consecutivos. Zeus también sumó 5 números enteros consecutivos distintos a los que sumó Denisse. Si la suma que obtuvo Denisse menos la suma que obtuvo Zeus es igual a 100, ¿cuánto se obtiene al restar el número más grande de los cinco que sumó Zeus del número más grande de los cinco que sumó Denisse?

4) Con el dinero que tiene, Marda podría comprar 5 tacos y le sobrarían 7 pesos, pero si quisiera comprar 8 tacos le faltarían 44 pesos. ¿Cuánto dinero tiene Marda?

5) Carlos va a ahorrar dinero de la siguiente manera. El primer día ahorrará $\$10$, el segundo $\$11$, el tercero $\$12$, y así sucesivamente. Considerando que inicialmente no tiene dinero ahorrado, ¿cuántos pesos tendrá ahorrados al finalizar el día número 17?

6) Ana, Andrea, Cynthia y Vicky se sientan en ese orden alrededor de una mesa redonda de un restaurante. El restaurante tiene tres platillos distintos de desayuno. Ellas quieren ordenar cada una un platillo, de tal forma que cada dos de ellas que estén sentadas juntas obtengan platillos distintos. ¿De cuántas formas pueden ordenar?

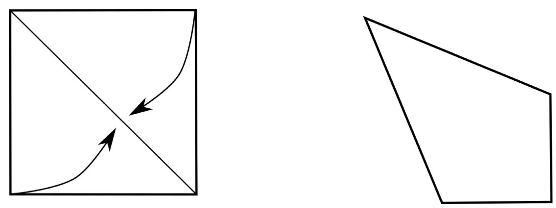
7) A un cuadrado de papel se le han recortado sus esquinas, formando un octágono regular, como se muestra en la figura.



Después, se han unido los puntos medios de cuatro de los lados del octágono, formando un nuevo cuadrado. Si el área del nuevo cuadrado es 25 cm^2, ¿cuántos centímetros cuadrados es el área del cuadrado original?

8) ¿Cuántas parejas de lados perpendiculares hay en un octágono regular?

9) Zara toma un trozo cuadrado de papel y dobla dos de sus lados sobre la diagonal, como se muestra, para obtener un cuadrilátero. ¿Cuántos grados mide el mayor ángulo del cuadrilátero?



10) ¿Cuántos números de cuatro dígitos utilizan en su escritura exactamente dos veces el número 7 y al menos un 5 más a la derecha que los dos números 7? *Nota:* Algunos ejemplos de números que cumplen la propiedad son 7375, 5775, 7752 y 7705.

11) Sam tiene doce tarjetas. Tres de las tarjetas tienen el número 6, dos de las tarjetas tienen el número 7, tres llevan el número 8 y cuatro tienen anotado el número 9. Las colocó en una fila. Se sabe que una con el número 7 quedó en uno de los extremos de la fila y una con el número 8 quedó en el extremo opuesto. Además, las tarjetas con el número 8 quedaron juntas y también las tarjetas con el número 9 quedaron juntas. Si la décima tarjeta contando desde la izquierda tiene el número 6, ¿qué número tiene la tarjeta en la sexta posición (contando desde la izquierda)?

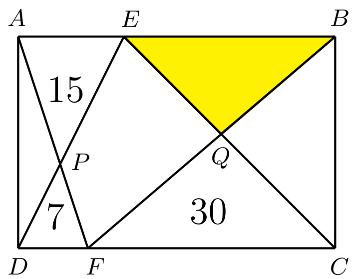
12) Una rana estaba parada en el 0 de la recta numérica. Cada salto que dio la rana fue de 3 unidades a la derecha o 3 unidades a la izquierda (por ejemplo, después de haber dado 4 saltos podría haber estado en el número 6 si hubiera brincado del 0 al -3, luego al 0, luego al 3 y luego al 6). ¿Cuál es el máximo número de saltos que pudo haber dado la rana si al final quedó en el número 45 y se sabe que no dio más de 30 saltos?

13) Carlos y Diego practicaron su puntería con el arco. Lanzaron flechas por turnos de forma alternada, primero Carlos y luego Diego. De cada 3 turnos consecutivos de Carlos, él acertó al blanco exactamente 2 veces. De cada 6 turnos consecutivos de Diego, él acertó al blanco exactamente 4 veces. Tanto Carlos como Diego hicieron 25 lanzamientos. Carlos acertó en sus primeros 2 lanzamientos y Diego acertó en sus primeros 4 lanzamientos. ¿Para cuántos de los 25 turnos sucede que, al final del turno, Carlos y Diego han acertado en total la misma cantidad de lanzamientos?

14) Rocío tiene el número $\overline{a9b}$ (es decir, tiene el número cuya cifra de unidades es b, cuya cifra de decenas es 9 y cuya cifra de centenas es a). Eva tiene el número $\overline{15cd}$. El número de Rocío es múltiplo de cada uno de los dígitos que usa el número de

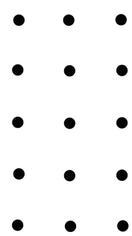
Eva y viceversa. Si ambos números son impares, ¿qué número se obtiene al restar el número de Eva del número de Rocío?

15) Se tiene un rectángulo $ABCD$, E es un punto sobre AB y F es un punto sobre CD. Además ED y AF se intersecan en P; también EC y BF se intersecan en Q. Si el área del triángulo DPF es 7, el área del triángulo FQC es 30 y el área del triángulo APE es 15, ¿cuánto vale el área de EQB?

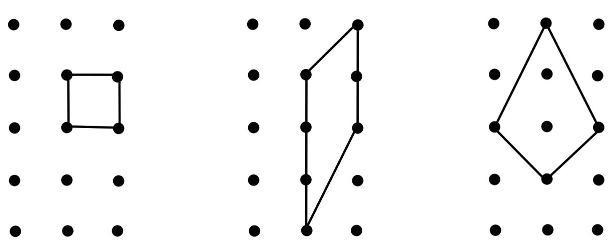


Prueba por Equipos, Nivel I

1) En la figura se muestran los vértices de una cuadrícula de 4×2, es decir cinco hileras horizontales de 3 puntos cada una. ¿Cuántos cuadriláteros pueden formarse si sus cuatro vértices se escogen dentro de los puntos de la figura?



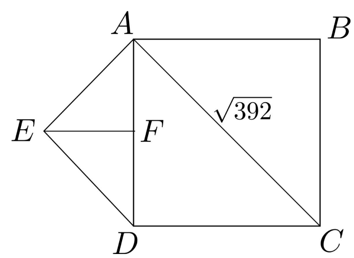
Nota: En la siguiente figura se muestran tres ejemplos de cuadriláteros que se pueden formar.



2) Sofía, Luis y José son 3 hermanos. Sus edades son números enteros. Si se suman las edades de Luis y José se obtiene $2/3$ de la edad de su mamá. Por otro lado, si se

suman las edades de Sofía y Luis, se obtiene $3/4$ de la edad de su papá. Al sumar las edades de la mamá y del papá se obtiene 90. Si Sofía es 8 años mayor que José y José es 4 años menor que Luis, ¿cuál es la edad de José?

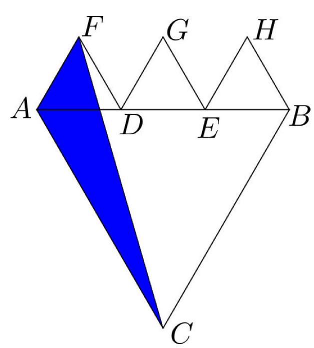
3) En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado cuya diagonal AC mide $\sqrt{392}$. El punto E es tal que los ángulos $\angle EAD$ y $\angle EDA$ miden $45°$; F es un punto sobre AD tal que EF es perpendicular a AD, ¿cuál es la longitud de EF?



4) Un cierto planeta tarda 101 días en dar la vuelta alrededor de su sol, es decir, su año dura 101 días. Todos los meses en ese planeta tienen 11, 12, 13 o 14 días. Si hay al menos un mes con cada una de estas opciones, ¿cuántos meses tiene su año?

5) El promedio, de cinco enteros distintos es 30. Si el menor de esos números es 7, ¿cuál es el mayor valor que puede tener el mayor?

6) En la siguiente figura, ABC es un triángulo equilatero de área 45, D y E son puntos sobre AB. Los triángulos AFD, DGE y EHB son triángulos equiláteros iguales. ¿Cuánto vale el área del triángulo AFC?

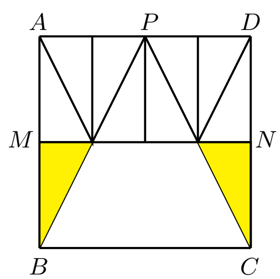


7) En algunos lugares se escribe la fecha de la forma $dd/mm/yy$, donde dd es el día, mm es el mes y aa son los últimos dos dígitos del año. Digamos que una fecha es *homogénica* si el número de dos dígitos aa es igual al producto de los números dd y mm. Por ejemplo, la fecha $04/07/28$ es homogénica, ya que $4 \times 7 = 28$. ¿Cuántas fechas homogénicas tales que $mm \geq 7$ hay en un siglo?

8) En la oficina de César se trabaja de lunes a viernes. Durante la pandemia han estado trabajando a distancia, pero ahora han decidido asistir a la oficina algunos días. Cada persona ha elegido 3 días para asistir; ninguna persona ha elegido asistir los mismos 3 días que otra; todos los días asistirá la misma cantidad de personas, excepto los miércoles que asistirá una menos; y al menos la mitad de las personas asistirá cada día. ¿Cuántas personas trabajan en la oficina de César (incluyéndole)?

Soluciones de la Prueba Individual, Nivel I

1) La respuesta es 8. Al ser M, N y P puntos medios, tenemos que $AMND$ y $MBDC$ son rectángulos. Además, el rectángulo $AMND$ puede dividirse en 8 triángulos congruentes a los sombreados, como se muestra en la siguiente figura.



Entonces se puede concluir que el área sombreada es una octava parte del área del cuadrado, esto es, $\frac{64}{8} = 8$.

2) La respuesta es 6. Sabemos que el único número primo par es el 2. Como queremos que la suma de dos números primos sea un número primo, uno de los primos de la suma debe ser el 2 (en caso contrario, estaríamos sumando dos números primos impares y eso nos daría un número par mayor que 2 y, por lo tanto, no sería primo). Entonces hay que revisar qué números primos de dos dígitos al sumarles 2 se obtiene un número primo. Los números primos de dos dígitos son:

$$11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

Entonces, los primos que satisfacen el problema son $11, 17, 29, 41, 59$ y 71.

3) La respuesta es 20. Como los números son consecutivos, la diferencia del más grande de Denisse con el más grande de Zeus es igual a la diferencia de sus primeros números y también a la diferencia de sus segundos, de sus terceros o de sus cuartos. Al ser 5 números de cada uno, esa diferencia es $\frac{100}{5} = 20$. Por ejemplo, los números de Denisse podrían haber sido $21, 22, 23, 24, 25$ y los de Zeus $1, 2, 3, 4, 5$.

Solución alternativa. Supongamos que los números de Denisse son a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$ y los de Zeus son $b, b+1, b+2, b+3, b+4$.
Entonces, $(5a+10) - (5b+10) = 100$, de donde $(a+4) - (b+4) = a - b = \frac{100}{5} = 20$.

4) La respuesta es 92. Pensemos que Marda compra los 8 tacos de uno en uno. Al pagar los primeros 5 tacos, le sobran 7 pesos y, si tuviera 44 pesos más, podría pagar los otros 3 tacos. Entonces vemos que cada taco cuesta $\frac{7+44}{3} = 17$ pesos y Marda tiene $5 \times 17 + 7 = 92$ pesos.

   Solución alternativa. Supongamos que cada taco cuesta x pesos. Entonces, tenemos que $8x - 44 = 5x + 7$, de donde $3x = 44 + 7 = 51$ y así $x = 17$. Por lo tanto, Marda tiene $5 \times 17 + 7 = 92$ pesos.

5) La respuesta es 306. Al finalizar el día 17, Carlos tendrá ahorrado

$$10 + (10 + 1) + (10 + 2) + \cdots + (10 + 16) = 10 \cdot 17 + (1 + 2 + \cdots + 16)$$

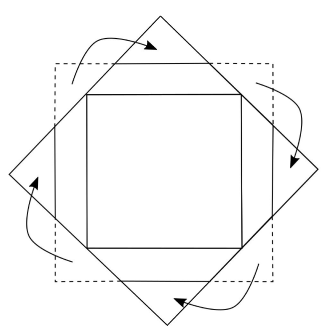
   pesos. Ahora, usando la fórmula de Gauss, tenemos que

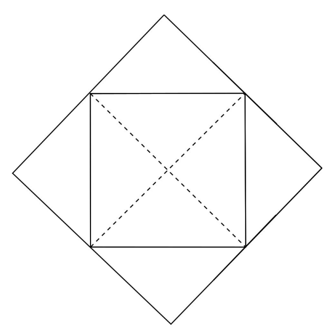
$$1 + 2 + \cdots + 16 = \frac{16 \cdot 17}{2} = 8 \cdot 17.$$

   Combinando, tenemos que la respuesta es $18 \cdot 17 = 306$ pesos.

6) La respuesta es 18. Si Ana y Cynthia escogen el mismo platillo (hay 3 posibilidades), entonces cada una de Andrea y Vicky puede escoger cualquiera de los otros 2 platillos, así que en este caso hay $3 \times 2 \times 2 = 12$ posibilidades. Si Ana y Cynthia escogen distinto platillo (hay $3 \times 2 = 6$ posiblidades para hacer esto), entonces Andrea y Vicky tendrán que escoger el platillo restante. En total, el número de formas en que pueden ordenar es $12 + 6 = 18$.

7) La respuesta es 50. Coloquemos las esquinas recortadas junto a los otros lados del octágono para formar un cuadrado, como se muestra en la figura de la izquierda. Notemos que si trazamos las diagonales del cuadrado pequeño, la figura queda dividida en 8 triángulos iguales y el cuadrado pequeño está formado por 4 de ellos. Luego, el área del cuadrado grande es el doble del área del cuadrado pequeño.





   Solución alternativa. Sea $2a$ la longitud de cada lado del octágono. Así, la hipotenusa de cada triángulo de las esquinas es $2a$. Luego, los lados de dichas esquinas miden $\sqrt{2}a$. De esta manera, el lado del cuadrado original mide $2 + 2\sqrt{2}a$.
   Ahora, cada lado del cuadrado nuevo puede verse como la recta media de un trapecio de bases $2a$ y $2a + 2\sqrt{2}a$. Luego, la longitud del lado del cuadrado nuevo es el

promedio de estas bases, esto es, $2a + \sqrt{2}a$. Entonces, el área del cuadrado original es $(2a + 2\sqrt{2}a)^2 = 4a^2 + 8\sqrt{2}a^2 + 8a^2 = 12a^2 + 8\sqrt{2}a^2$ y el área del cuadrado nuevo es $(2a + \sqrt{2}a)^2 = 4a^2 + 4\sqrt{2}a^2 + 2a^2 = 6a^2 + 4\sqrt{2}a^2$. De aquí, es claro que el área del cuadrado original es el doble del área del cuadrado nuevo.

8) La respuesta es 8. Si pintamos los lados del octágono de manera alternada de azul y rojo, es fácil ver que si dos lados son perpendiculares entonces están pintados del mismo color, por lo que nos concentraremos en los segmentos rojos. Hay 6 maneras de tomar dos de ellos y 2 de esas elecciones no son lados perpendiculares, por lo que hay 4 maneras de tomar dos lados rojos que sean perpendiculares. Igual para los lados azules, por lo que hay $2 \times 4 = 8$ parejas de lados perpendiculares en un octágono regular.

9) La respuesta es $112.5°$. El cuadrilátero tiene un ángulo recto. El ángulo opuesto al ángulo recto mide $45°$ pues es la mitad de un ángulo interno del cuadrado. Si llamamos a a los otros dos ángulos iguales del cuadrilátero, tenemos que $90° + 45° + 2a = 360°$ de donde $a = 112.5°$es el ángulo mayor del cuadrilátero.

10) La respuesta es 34. Al ser de cuatro cifras y utilizar los dígitos 7, 7 y 5, debe haber un dígito extra d. Si $d \neq 5$, entonces 7 puede ir en cualquiera de las cuatro posiciones: $d775$, $7d75$, $77d5$ o $775d$ y, en cada posición, tiene 8 opciones, salvo si se inicia con 0. En este caso hay $4 \times 8 - 1 = 31$ números. Si $d = 5$ los números son 5775, 7575 y 7755. En total son $31 + 3 = 34$ números.

11) La respuesta es 9. Por los primeros datos tenemos dos opciones para ubicar a algunas de las tarjetas:

$$7, -, -, -, -, -, -, -, -, 8, 8, 8$$

$$8, 8, 8, -, -, -, -, -, -, -, -, 7$$

Como la décima tarjeta tiene el número 6, la primera opción indicada arriba es imposible (pues en la décima posición está un 8). Entonces, la opción correcta es

$$8, 8, 8, -, -, -, -, -, -, 6, -, 7$$

Falta ubicar las 4 tarjetas con el número 9, que sabemos que deben ir juntas, así que solo pueden quedar en las posiciones $(4, 5, 6, 7)$, $(5, 6, 7, 8)$, $(6, 7, 8, 9)$. En cualquier caso, la sexta tarjeta desde la izquierda lleva el número 9.

12) La respuesta es 29. Como la rana avanza 3 unidades en cada salto, la menor cantidad de saltos que necesita para llegar al 45 es $\frac{45}{3} = 15$. Podemos ver que si la rana puede llegar en n saltos al 45, entonces también puede llegar en $n+2$ saltos, pues al inicio puede saltar al -3, luego volver al 0 y del 0 hacer n saltos para llegar al 45. Como la rana inicia en el número 0 que es par, al moverse una cantidad impar de unidades llega a un número impar, luego a un número par y así sucesivamente, por lo que por paridad la rana debe llegar al 45 en una cantidad impar de saltos, esto es, n es impar. Como la rana no dio más de 30 saltos, los valores posibles de n son 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27 y 29, de donde 29 es el máximo.

13) La respuesta es 17. Por las condiciones del problema, es fácil ver que Carlos acierta todas las flechas excepto las que son múltiplos de 3, mientras que Diego acierta todas las flechas excepto las flechas 5, 6, 11, 12, 17, 18, 23 y 24. Hasta el lanzamiento 18, Carlos acierta 12 flechas y Diego también. Como en el lanzamiento 18 ninguno de los dos acierta, al final del lanzamiento 17 han acertado la misma cantidad de flechas. Como Diego no acierta las flechas 23 y 24 pero Carlos sí acierta la flecha 23, concluimos que la respuesta es 17.

14) La respuesta es 980. Como el número de Eva lleva un 5, el de Rocío acaba en 0 o 5, pero es impar así que $b = 5$. De aquí que el número de Eva también debe ser múltiplo de 5 y así $d = 5$. Como el número de Rocío lleva un 9, entonces $1 + 5 + c + 5$ es múltiplo de 9 y, al ser c un dígito, la única posibilidad es que $c = 7$ (la suma es 18). El único número de la forma $\overline{a95}$ que es múltiplo de 7 es el 595 por lo que $a = 5$. De esta manera, si Rocío tiene el número 595 y Eva tiene el 1575 se cumplen las condiciones del problema y la respuesta es $1575 - 595 = 980$.

15) La respuesta es 22. Observemos que los triángulos DEC y AFB tienen la misma área (igual a la mitad del área del rectángulo $ABCD$). Como ambos triángulos tienen en común al cuadrilátero $EPFQ$, tenemos que el área del triángulo EQB es igual a $7 + 30 - 15 = 22$.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel I

1) Primero, notemos que, sin importar cómo se elijan los cuatro vértices del cuadrilátero, habrá tres maneras de formar el cuadrilátero. En efecto, si la envolvente convexa de los puntos es un cuadrilátero, entonces los tres cuadriláteros serían el de la envolvente convexa y los dos autointersectantes donde los dos pares de lados opuestos en el cuadrilátero de la envolvente convexa son las diagonales. En cambio, si la envolvente convexa de los puntos es un triángulo, el otro punto debe estar en el interior del triángulo (no contamos cuadriláteros con lados que estén sobre una misma recta). Habrá tres formas de formar el cuadrilátero en este caso, que son justamente las $\binom{3}{2} = 3$ maneras de elegir los puntos que serán los extremos de los lados que inciden en el punto interno del triángulo. Así, en cualquier caso donde contemos la manera de elegir puntos, habrá que multiplicar por 3 el resultado.

   Ahora, separamos en dos casos dependiendo de cuántas columnas de puntos de la cuadrícula tienen vértices del cuadrilátero, donde el caso en el que todos los vértices están sobre una misma columna no cuenta. El primer caso es que el cuadrilátero se forme con puntos de solo 2 de las hileras verticales. Para escoger las dos hileras hay 3 posibilidades (las dos de la izquierda, las dos de la derecha o las dos de los extremos). Hay que escoger dos puntos de cada una de esas dos hileras verticales, pues de haber tres en una misma hilera vertical se formaría un cuadrilátero con lados que estén en una misma recta. Si numeramos los puntos de una de las hileras: 1, 2, 3, 4, 5, las posibilidades de elección de las parejas son las siguientes 10:

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}.$$

Entonces en este caso hay $3 \times 10 \times 10 = 900$ formas de elegir los vértices del cuadrilátero.

La otra posibilidad es que de una de las hileras verticales se escojan dos puntos (30 posibilidades pues hay 3 hileras y en la escogida hay 10 posibilidades); de las otras dos hileras hay que escoger un punto ($5 \times 5 = 25$ posibilidades). Entonces en este caso las posibilidades para escoger puntos son $30 \times 25 = 750$. Sin embargo, debemos de quitar los casos en los que tres de estos puntos son colineales, en cuyo caso los tres puntos están sobre hileras verticales diferentes. Nótese que esto equivale a contar la cantidad de formas de elegir un punto de cada hilera vertical de forma que estos sean colineales, y luego multiplicar eso por 12 que es la cantidad de formas de elegir el cuarto punto. Para hacer este conteo, hay tres casos: que los puntos estén en la misma hilera horizontal, que estén en hileras horizontales consecutivas y que estén en las hileras horizontales 1, 3 y 5. Para el primer caso, hay 5 maneras de elegir los puntos. Para el segundo hay 3 formas de elegir las hileras y 2 formas de elegir los puntos habiendo elegido las filas, dando un total de $3 \times 2 = 6$ formas. Luego, para el último caso, solo hay 2 formas de elegir los puntos. Esto da un total de $5 + 6 + 2 = 13$ formas de elegir los tres puntos colineales, por lo que hay $13 \times 12 = 156$ maneras de elegir cuatro puntos con tres de ellos colineales y en diferentes hileras verticales.

Por lo tanto, en total hay $3 \times (300 + 750 - 156) = 2682$ cuadriláteros con sus cuatro vértices en la cuadrícula.

2) Como la suma de las edades de Luis y José es $\frac{2}{3}$ de la edad de su mamá, que es un número entero, entonces esa suma debe ser par (pues para obtener la suma, hay que dividir entre 3 la edad de la mamá y multiplicar por 2); pero Luis le lleva a José 4 años, así que ambas edades son números pares. Por la misma razón, también la edad de Sofía es un número par. Un razonamiento similar nos dice que la suma de las edades de Luis y Sofía debe ser un múltiplo de 3 (por ser $\frac{3}{4}$ de la edad del papá). Intentamos con distintas edades. Si, por ejemplo, las edades son 10, 14 y 18, entonces $14 + 18 = 22$ no es múltiplo de 3. Si las edades son 12, 16 y 20 entonces todas las condiciones se cumplen, siendo la edad de la mamá $\frac{3\times(12+16)}{2} = 42$ y la edad del papá $\frac{4\times(16+20)}{3} = 48$.

3) Supongamos que cada lado del cuadrado mide a. Entonces, por el teorema de Pitágoras, tenemos que $a^2 + a^2 = 392$, de donde $a^2 = 196$, de manera que $a = \sqrt{196} = 14$. Por simetría, F es punto medio de AD y AEF es un triángulo isósceles con $EF = AF$. Luego, EF mide $\frac{14}{2} = 7$.

4) Como hay al menos 11 días en un mes, el número de meses no puede ser mayor de 9, pues $11 \times 10 = 110 > 101$. Como cada mes tiene a lo más 14 días, el número de meses no puede ser menor de 8 porque $14 \times 7 = 98 < 101$. Esto significa que el año tiene 8 o 9 meses.
Si fueran 9 meses, el número mínimo de días en el año sería igual a $14 + 13 + 12 + 6 \times 11 = 105 > 101$, lo cual no puede ser. Entonces, el número de meses en un año es 8 y una posibilidad es que haya 3 meses de 14 días, un mes de 13 días, 2 meses de 12 días y 2 meses de 11 días: $3 \times 14 + 13 + 2 \times 12 + 2 \times 11 = 101$.

5) Para que el promedio de los cinco números sea 30, su suma debe ser $5 \times 30 = 150$. Para encontrar el mayor valor posible del número más grande, los otros cuatro deben ser lo menor posible. Como el menor es 7, lo menos que pueden ser los primeros 4 números es $7, 8, 9$ y 10. El mayor en este caso es $150 - (7 + 8 + 9 + 10) = 150 - 34 = 116$.

6) El lado de cada triángulo equilátero pequeño es la tercera parte del lado del triángulo equilátero grande, así que el área del triángulo equilátero grande es 9 veces el área de cada triángulo equilátero pequeño, de donde cada triángulo equilátero pequeño tiene área 5.
Trazamos los segmentos FH y HC. Vemos que el pentágono $AFHBC$ queda dividido en tres triángulos: AFC, FHC y HBC, y que los triángulos AFC y HBC tienen la misma área.
La base FH del triángulo FHC mide el doble que la base de un triángulo equilátero pequeño, y la altura GC mide 4 veces la altura de un triángulo equilátero pequeño, por lo que su área es 8 veces la de un triángulo equilátero pequeño. Así, el área del triángulo FHC es 40.
Es fácil ver que el área del pentágono $AFHBC$ equivale a la de 14 triángulos equiláteros pequeños, esto es, su área es 70. Como el área del triángulo FHC es 40, el área del triángulo AFC es $\frac{70-40}{2} = 15$.

7) Para ver cuántas fechas homogénicas tiene cada uno de los meses (a partir del mes 07), basta dividir 99 entre el número del mes y buscar el mayor entero menor o igual que ese cociente.
Como $14 \leq 99/7 < 15$, tenemos que el séptimo mes tiene 14 fechas homogénicas. Análogamente, el octavo mes tiene 12 fechas homogénicas, el noveno mes tiene 11, el décimo mes tiene 9, noviembre tiene 9 y diciembre tiene 8. El total es $14 + 12 + 11 + 9 + 9 + 8 = 63$.

8) Hay 10 posibles maneras de elegir 3 días de lunes a viernes, como se muestra en la siguiente tabla:

	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes
1	•	•	•		
2		•	•	•	
3			•	•	•
4	•	•		•	
5	•	•			•
6		•	•		•
7	•		•	•	
8	•			•	•
9		•		•	•
10	•		•		•

Así, el máximo número posible de personas es 10. Podemos contar el número de asistencias semanales multiplicando por 3 al número de personas, quedando como posibles números de asistencias semanales

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.$$

Como cada día asiste la misma cantidad de personas, excepto el miércoles que asiste una menos, al número de asistencias semanales le faltaría 1 para ser múltiplo de 5. Luego, las únicas opciones posibles para el número de asistencias semanales son 9 y 24, que corresponden a 3 y 8 personas, respectivamente. Si el número de personas fuera 3, tendrían que asistir 2 personas cada día, excepto el miércoles que solo asistiría una, pero sabemos que al menos la mitad de las personas asistió cada día y eso no se cumpliría el miércoles. Por lo tanto, la única opción posible es que en la oficina de César haya 8 personas. Un posible horario se obtendría eliminando las líneas 1 y 3 de la tabla anterior.

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2022, No. 4

6^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 9 al 12 de junio de 2022 se llevó a cabo de manera virtual, el Concurso Nacional de la 6^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Participaron 115 estudiantes de primaria y 145 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

En esta ocasión, los ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos en cada nivel junto con los ganadores de medalla de plata en la prueba individual del Nivel I, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos

que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2023.
Los alumnos ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos del Nivel II del Concurso Nacional de la 6^a OMMEB son los siguientes.

Nombre	**Estado**	**Medalla**
Takumi Higashida Martínez	Ciudad de México	Oro individual
Rodrigo Saldívar Mauricio	Zacatecas	Oro individual
Antonio Gutiérrez Meléndez	Coahuila	Oro individual
Ángel de la Cruz Martínez Almeida	Zacatecas	Oro individual
Dana Karen Medina González	Yucatán	Oro individual
Carlos Daniel Maya Rojas	Hidalgo	Oro individual
Yara Peimbert Pichardo	Ciudad de México	Oro por equipos
José Luis Romero Beristain	Ciudad de México	Oro por equipos

En la prueba por equipos en el Nivel II, la Ciudad de México obtuvo el primer lugar (con 227 puntos), el Estado de Jalisco obtuvo el segundo lugar (con 212 puntos) y el Estado de Coahuila obtuvo el tercer lugar (con 196 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel II fueron:
Primer lugar: Ciudad de México (con 465 puntos).
Segundo lugar: Zacatecas (con 453 puntos).
Tercer lugar: Coahuila (con 421 puntos).
A continuación presentamos los problemas y soluciones de los exámenes individual y por equipos del Nivel II del Concurso Nacional de la 6^a OMMEB.

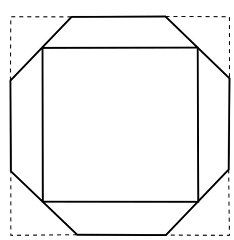
Prueba Individual, Nivel II

Parte A

1) ¿De cuántas formas se puede elegir, de entre los lados de un octágono regular, dos que sean perpendiculares entre sí?

2) Denisse sumó 5 números consecutivos. Zeus también sumó 5 números consecutivos distintos a los que sumó Denisse. Si la suma que obtuvo Denisse menos la suma que obtuvo Zeus es igual a 100. ¿Cuál es la diferencia entre el número más grande de los cinco que sumó Denisse menos el número más chico de los cinco que sumó Zeus?

3) A un cuadrado de madera se le han recortado sus esquinas, formando un octágono regular, como se muestra en la figura.



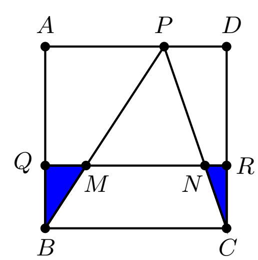
Después, se han unido los puntos medios de cuatro de los lados del octágono, formando un nuevo cuadrado. Si el área del nuevo cuadrado es 25, ¿cuál es el área del cuadrado original?

4) ¿Cuántos números de cuatro dígitos utilizan en su escritura al menos dos veces el número 7 y al menos una vez el número 5 después de dos números 7? Por ejemplo, los números 7375, 7575 y 7775 cumplen la condición, pero los números 7577 y 7573 no la cumplen.

5) Una rana está parada en el 0 de la recta numérica. Cada salto que da la rana se puede mover 3 unidades a la derecha o a la izquierda (por ejemplo, después del primer salto puede llegar al 3 o al -3). Después de n saltos llega por primera vez al 2022. Calcula la suma de todos los posibles valores de n, si la rana dio menos de 680 saltos.

6) ¿Cuántos números A de cuatro dígitos hay tales que un medio de A es divisible por 2, un tercio de A es divisible por 3 y un quinto de A es divisible por 5?

7) El cuadrado $ABCD$ de la figura tiene lado 12, P es un punto sobre AD, Q es un punto sobre AB tal que $AQ = 2QB$ y R es un punto sobre CD tal que $DR = 2RC$. BP y CP cortan a QR en los puntos M y N, respectivamente. ¿Cuánto vale la suma de las áreas de los triángulos QBM y RCN?



8) Aida escribió un entero positivo en cada lado de un cuadrado. Luego escribió en cada vértice la multiplicación de los números de los dos lados que concurren en dicho vértice. La suma de los números de los vértices es 15. ¿Cuál es la suma de los números escritos en los lados del cuadrado?

9) Sea ABC un triángulo equilátero. El punto D es tal que A es punto medio del segmento CD. El círculo con centro en B y radio BD corta a la recta BA en el punto E que cumple que A está dentro del segmento BE. Halla la medida de $\angle DEA$.

10) Xim tiene el número $\overline{i9m}$ y Eva tiene el número $\overline{15ve}$. El número de Xim es múltiplo de cada uno de los dígitos que usa el número de Eva y viceversa. Si ambos números son impares, ¿cuál es la resta del número de Eva menos el de Xim?

11) Sea $ABCD$ un rectángulo. Un punto E se coloca en la recta CD de tal manera que D quede entre E y C. Sea M el punto medio del segmento AC. Si se cumple

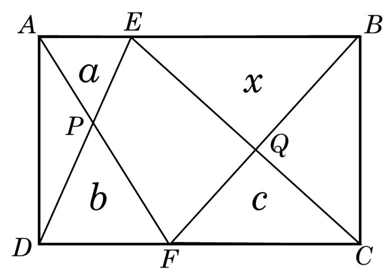
que $\angle DBC = 40°$ y $\angle EAD = 10°$, encuentra la medida, en grados, del ángulo $\angle EMB$.

12) El número de cuatro dígitos $\overline{8abc}$, está formado por 4 dígitos diferentes. Además, es múltiplo de 7, 8 y 9. Obtén el valor de $a + b - c$.

Parte B

13) ¿Cuántas parejas de enteros (n, m) con $n \geq 0$ y $m \geq 0$ cumplen que $2n + 3m = 2022$?

14) Se tiene un rectángulo $ABCD$ en el que se han marcado las áreas de cuatro de sus triángulos cuyas medidas son a, b, c y x. Demostrar que $x = b + c - a$.

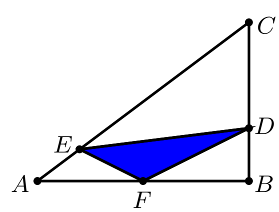


15) Para cada número de cuatro dígitos $\overline{abcd}$, es decir, con a distinto de cero, denotemos por $P(\overline{abcd})$ al producto $(a + b)(a + c)(a + d)(b + c)(b + d)(c + d)$.
Por ejemplo, $P(2022) = (2 + 0)(2 + 2)(2 + 2)(0 + 2)(0 + 2)(2 + 2) = 512$ y $P(1234) = (1 + 2)(1 + 3)(1 + 4)(2 + 3)(2 + 4)(3 + 4)$.
¿Cuántos números $\overline{abcd}$ con algún 0 entre sus dígitos cumplen que $P(\overline{abcd})$ es una potencia de 2?

Prueba por Equipos, Nivel II

1) El promedio de cinco enteros distintos es 30. Si el menor de estos números es 7, ¿cuál es el mayor valor que puede tener cualquiera de ellos?

2) En el triángulo ABC, $\angle ABC = 90°$ y los puntos D, E y F están sobre los lados CB, AC y AB, respectivamente, de tal forma que $AE = 1$, $EC = 4$, $CD = 2$, $DB = 1$ y $BF = 2$. Calcular el área del triángulo DEF.



3) Un número de cuatro dígitos $\overline{abcd}$ se dice *pariente* si la diferencia entre los números $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ es par. ¿Cuántos números parientes existen tales que sus dígitos están en orden estrictamente creciente?

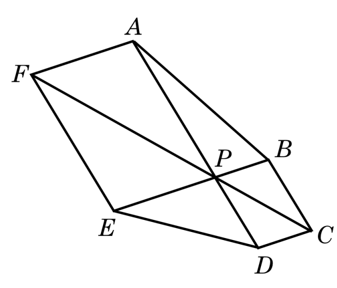
4) En algunos lugares se escribe la fecha de la forma $dd/mm/yy$, donde dd es el día, mm el mes y yy son los últimos dos dígitos del año. Una fecha es *homogénica* si el número de dos dígitos yy es igual al producto de los números dd y mm. Por ejemplo, la fecha $04/03/12$ es homogénica, ya que $4 \times 3 = 12$. ¿Cuántas fechas homogénicas hay en un siglo?
Notas:
   - Febrero tiene 28 días; enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre tienen 31 días, y el resto tienen 30 días.
   - Se consideran años bisiestos a todos los múltiplos de 4, en los que febrero tiene 29 días.

5) ¿Cuántos números de 4 dígitos contienen al menos un 4 y al menos un 3?

6) En la oficina de César trabajan de lunes a viernes. Durante la pandemia han estado trabajando a distancia, pero ahora han decidido asistir a la oficina algunos días. Cada persona ha elegido 3 días para asistir; ninguna persona ha elegido asistir los mismos 3 días que otra; todos los días asistirá la misma cantidad de personas, excepto los miércoles que asistirá una menos; y al menos la mitad de las personas asistirá cada día. ¿Cuántas personas trabajan en la oficina de César (incluyéndole)?

7) El rectángulo $ABCD$ tiene área 2022 y lados de longitudes números enteros. Sea BC uno de los lados mayores del rectángulo. Las bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BCD$ cortan al lado AD en dos puntos, dividiendo al segmento AD en tres segmentos. ¿Cuál es el valor máximo que puede tener el producto de las medidas de esos tres segmentos?
Nota: La bisectriz del ángulo $\angle ABC$ es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.

8) Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo tal que las diagonales AD, BE y CF se cortan en un punto P. Los cuadriláteros $APEF$ y $BPDC$ son ambos paralelogramos.



Si (XYZ) denota el área del triángulo XYZ, demuestra que

$$4 \cdot (APB) \cdot (DPE) = (APEF) \cdot (BPDC).$$

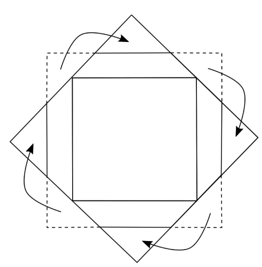
Soluciones de la Prueba Individual, Nivel II

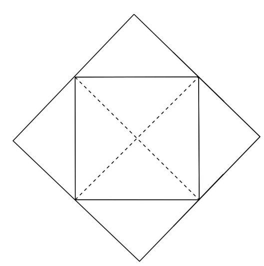
Parte A

1) La respuesta es 8. Si pintamos los lados del octágono de manera alternada de azul y rojo, es fácil ver que si dos lados son perpendiculares entonces están pintados del mismo color, por lo que nos concentraremos en los segmentos rojos. Hay 6 maneras de tomar dos de ellos y 2 de esas elecciones no son lados perpendiculares, por lo que hay 4 maneras de tomar dos lados rojos que sean perpendiculares. Igual para los lados azules, por lo que hay $2 \times 4 = 8$ parejas de lados perpendiculares en un octágono regular.

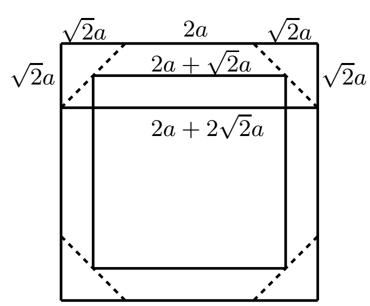
2) La respuesta es 24. Si a es el primer número que sumó Denisse y b es el primer número que sumó Zeus, entonces $(a+i)-(b+i) = a-b$ para cada entero $1 \leq i \leq 4$. Por lo tanto, la suma de los números de Denisse menos la suma de los números de Zeus es igual a $5(a-b)$. El problema nos dice que esto es igual a 100, entonces $a-b = 20$. Finalmente, la diferencia buscada es $(a+4)-b = (a-b)+4 = 24$.

3) La respuesta es 50. Coloquemos las esquinas recortadas junto a los otros lados del octágono para formar un cuadrado, como se muestra en la figura de la izquierda. Notemos que si trazamos las diagonales del cuadrado pequeño, la figura queda dividida en 8 triángulos iguales y el cuadrado pequeño está formado por 4 de ellos. Luego, el área del cuadrado grande es el doble del área del cuadrado pequeño.





Solución alternativa. Sea $2a$ la longitud de cada lado del octágono. Así, la hipotenusa de cada triángulo de las esquinas mide $2a$. Luego, los lados de dichas esquinas miden $\sqrt{2}a$. De esta manera, el lado del cuadrado original mide $2a + 2\sqrt{2}a$.



Ahora, cada lado del cuadrado nuevo puede verse como la recta media de un trapecio de bases $2a$ y $2a + 2\sqrt{2}a$. Luego, la longitud del lado del cuadrado nuevo es el promedio de estas bases, esto es, $2a + \sqrt{2}a$. Entonces, el área del cuadrado original es $(2a + 2\sqrt{2}a)^2 = 4a^2 + 8\sqrt{2}a^2 + 8a^2 = 12a^2 + 8\sqrt{2}a^2$ y el área del cuadrado nuevo es $(2a + \sqrt{2}a)^2 = 4a^2 + 4\sqrt{2}a^2 + 2a^2 = 6a^2 + 4\sqrt{2}a^2$. De aquí, es claro que el área del cuadrado original es el doble del área del cuadrado nuevo.

4) La respuesta es 36. Al ser de cuatro cifras y utilizar los dígitos 7, 7 y 5 debe haber un dígito extra d. Si $d \neq 5, 7$, puede ir en cualquiera de las cuatro posiciones: $d775, 7d75, 77d5, 775d$ y en cada posición tiene 8 opciones, salvo si se inicia con 0. En este caso hay $4 \times 8 - 1 = 31$ números. Si $d = 7$, los números son 7775 y 7757. Si $d = 5$, los números son 5775, 7575 y 7755. En total son $31 + 2 + 3 = 36$ números.

5) La respuesta es 2028. La rana avanza 3 unidades en cada salto. La menor cantidad de saltos que ocupa para llegar al 2022 es $2022/3 = 674$. Notemos que si la rana puede llegar en n saltos al 2022, entonces también puede llegar en $n+2$ saltos, pues al inicio puede saltar al -3, luego volver al 0 y del 0 hacer n saltos para llegar al 2022. Por lo que n puede ser $674, 676, 678, \ldots$. Para que llegue en menos de 680 saltos, los únicos casos son 674, 676 y 678, cuya suma es igual a 2028.

6) La respuesta es 10. Dado que un medio de A es divisible por 2, A debe ser divisible por 2^2. Análogamente, A debe ser divisible por 3^2 y por 5^2. Luego, $A = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot k = 900 \cdot k$ para algún entero k. Como $1000 \leq A \leq 9999$, tenemos que $2 \leq k \leq 11$, esto es, hay 10 números.

7) La respuesta es 8. Por el teorema de Tales, tenemos que $\frac{PN}{PC} = \frac{PM}{PB} = \frac{AQ}{AB} = \frac{2}{3}$ y $\frac{MN}{BC} = \frac{PM}{PB} = \frac{2}{3}$. De lo anterior se sigue que $QM + NR = \frac{QR}{3} = 4$. Además, $QB = RC = 4$, por lo que la suma buscada es igual a $\frac{(QM+NR)4}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$.

8) La respuesta es 8. La suma de los números escritos en los vértices es 15, un número impar, por lo tanto, 1 o 3 de esos números deben ser impares. La única forma de conseguir esto es que los números escritos en los lados del cuadrados sean dos pares y dos impares y que los impares estén en lados adyacentes. De este modo, su producto produce un vértice impar y los tres vértices restantes son pares. Analicemos los posibles valores en los lados impares, siguiendo en orden creciente su producto:

   - $1 = 1 \times 1$. Lo buscado se consigue colocando 2 y 4 en los otros dos lados: $1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 4 + 4 \times 1 = 15$.
   - $3 = 1 \times 3$. Lo buscado se consigue colocando 2 y 2 en los otros dos lados: $1 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 1 = 15$.
   - $5 = 1 \times 5$. A partir de aquí, lo buscado no se puede conseguir porque los otros dos números deben ser al menos 2 y con eso excedemos la suma.

   Entonces, solo hay dos posibles combinaciones de números para escribir en los lados del cuadrado y en ambas la suma de esos números es 8.

Solución alternativa. Sean a, b, c y d los números escritos en los lados del cuadrado, siguiendo el sentido horario. Entonces, la suma de los números escritos en los vértices es igual a $ab+bc+cd+da=15$, que es equivalente a $(a+c)(b+d)=15$. Por lo tanto, como $a+c>1$, necesariamente $a+c=3$ y $b+d=5$, de donde $a+b+c+d=3+5=8$.

9) La respuesta es $75°$. Sea F el punto simétrico de B respecto a la recta AC. Claramente ACF es un triángulo equilátero y los puntos B, C, F y D están sobre la circunferencia con centro en A. Como $\angle BAD = 120° = \angle FAD$ y $AB = AF = AD$, entonces BFD es equilátero. Considerando la circunferencia con centro en B y radio BD tenemos que el arco $\widehat{FE}$ corresponde al ángulo central $\angle FBE = 30°$. Si trazamos DF y usamos que $\angle EDF$ está inscrito en el arco $\widehat{EF}$, obtenemos que $\angle EDF = 15°$. Como $\angle DAE = 60°$ y $\angle CDF = 30°$, concluimos que $\angle DEA = 75°$.

10) La respuesta es 980. Como el número de Eva lleva un 5, el de Xim acaba en 0 o en 5 y, como es impar, entonces $m = 5$. Luego, el número de Eva también debe ser múltiplo de 5 y también $e = 5$. Como el de Xim lleva un 9, entonces $1+5+v+5$ es múltiplo de 9, esto es, debe ser 18 y $v = 7$. El único número de la forma $\overline{i95}$ que es múltiplo de 7 es el 595, por lo que $i = 5$. De esta manera, si Xim tiene el 595 y Eva el 1575, se cumplen las condiciones del problema y la resta buscada es 980.

11) La respuesta es $170°$. Tracemos la recta AC, la cual pasa por M. Notemos que $\angle EMB = \angle EMA + \angle AMB$. Como el ángulo $\angle AMB$ es exterior al triángulo isósceles BMC, tenemos que $\angle AMB = 80°$. Observemos que el triángulo AEC es isósceles. En efecto, el triángulo AED es rectángulo con un ángulo de $10°$, por lo que $\angle AEC = 80°$. Además, $\angle ACD = 50°$ al ser $ABCD$ un rectángulo. Concluimos que el triángulo AEC tiene dos ángulos de $50°$. Como M es el punto medio de BD, también lo es de AC, esto es, EM es mediana y, por lo tanto, altura del triángulo isoscéles AEC, así que $\angle EMA = 90°$. Como $\angle EMA = 90°$ y $\angle AMB = 80°$, concluimos que $\angle EMB = 170°$.

12) La respuesta es 2. Notemos que $\text{mcd}(7,8,9) = 1$, por lo que $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$ divide a $8abc$. Los únicos múltiplos de 504 que inician con 8 son 8064 y 8568, pero 8568 tiene dígitos repetidos, por lo que 8064 es la única solución. Como $a = 0$, $b = 6$ y $c = 4$, concluimos que $a+b-c = 2$.

Parte B

13) Notemos que m debe ser par y que $2022 = 3 \times 674$. Además, para m par tal que $0 \leq 3m \leq 3 \times 674$, existe un único entero n tal que la pareja (n,m) cumple que $2n+3m = 2022$. Por lo tanto, basta contar cuántos enteros pares m satisfacen que $0 \leq 3m \leq 3 \times 674$, esto es, $0 \leq m \leq 674$. Hay $\frac{674}{2}+1 = 338$ enteros pares positivos menores o iguales que 674. Por lo que hay 338 elecciones para m y, como cada una de ellas determina a n, entonces hay 338 parejas (n,m) tales que $2n+3m = 2022$.

14) Notemos que Área(AFB) = Área(CED) = $\frac{1}{2}$Área$(ABCD)$. Además, tenemos que

$$\text{Área}(AFB) = a + \text{Área}(EPFQ) + x,$$
$$\text{Área}(CED) = b + \text{Área}(EPFQ) + c.$$

Entonces, $a+$Área$(EPFQ)+x = b+$Área$(EPFQ)+c$, de donde $x = b+c-a$.

15) Observemos que reordenar los dígitos de $\overline{abcd}$ no altera el valor de $P(\overline{abcd})$. Supongamos que $\overline{abcd}$ cumple lo que queremos y que $d = 0$. Entonces,

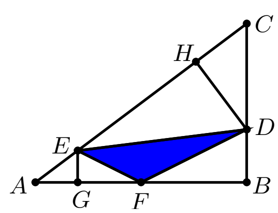
$$P(\overline{abcd}) = (a+b)(a+c)(a+0)(b+c)(b+0)(c+0) = abc(a+b)(a+c)(b+c).$$

Luego, a, b y c son potencias de 2. Notemos que $a+b$ también es potencia de 2 y, por lo anterior, es de la forma $2^\alpha + 2^\beta$. La única forma de que esto sea una potencia de 2 es que $\alpha = \beta$, lo cual implica que $a = b$. De manera análoga, obtenemos que $a = b = c$ y es fácil comprobar que los números 1110, 2220, 4440 y 8880, satisfacen el problema. Como cada uno de estos puede reordenarse de 3 formas distintas, la respuesta es $3 \times 4 = 12$.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel II

1) La respuesta es 116. Si el promedio de m números es n, la suma de ellos es mn. Entonces, si el promedio de 5 números diferentes es 30, la suma de ellos es 150. Si representamos estos cinco números como a, b, c, d, e, donde $a < b < c < d < e$, tenemos que $a+b+c+d+e = 150$. Como el menor es 7, necesariamente $a = 7$, por lo que $b+c+d+e = 143$. Finalmente, el número e tiene el mayor valor posible cuando b, c y d son los números más pequeños. Esto se da cuando $b = 8$, $c = 9$ y $d = 10$. Por lo tanto, $e = 116$.

2) El triángulo ABC es rectángulo de lados 3, 4 y 5, donde $AB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Luego, $AF = AB - FB = 4 - 2 = 2$. Trazamos las alturas EG y DH de los triángulos AEF y EDC, respectivamente. Los triángulos EAG y CAB son semejantes, de donde $\frac{1}{EG} = \frac{AE}{EG} = \frac{AC}{CB} = \frac{5}{3}$. De aquí que $EG = \frac{3}{5}$.



Los triángulos CHD y CBA son semejantes también. Luego, $\frac{2}{DH} = \frac{DC}{DH} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$ y, en consecuencia, $DH = \frac{8}{5}$.
Por lo tanto, el área del triángulo DEF es igual a

$$(ABC)-(FBD)-(AFE)-(CED) = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot \frac{8}{5} = \frac{6}{5}.$$

3) La respuesta es 66. Observemos que b y d deben tener la misma paridad y que $2 \leq b \leq 7$. Analicemos caso por caso:

   a) Si $b = 2$, entonces $a = 1$.
      - Si $d = 4$, podemos elegir a c de una manera ($c = 3$).
      - Si $d = 6$, podemos elegir a c de 3 maneras ($3 \leq c \leq 5$).
      - Si $d = 8$, podemos elegir a c de 5 maneras ($3 \leq c \leq 7$).

   b) Si $b = 3$, a puede tomar 2 valores ($1 \leq a \leq 2$).
      - Si $d = 5$, podemos elegir a c de una manera ($c = 4$).
      - Si $d = 7$, podemos elegir a c de 3 maneras ($4 \leq c \leq 6$).
      - Si $d = 9$, podemos elegir a c de 5 maneras ($4 \leq c \leq 8$).

   c) Si $b = 4$, a puede tomar 3 valores ($1 \leq a \leq 3$).
      - Si $d = 6$, podemos elegir a c de una manera ($c = 5$).
      - Si $d = 8$, podemos elegir a c de 3 maneras ($5 \leq c \leq 7$).

   d) Si $b = 5$, a puede tomar 4 valores ($1 \leq a \leq 4$).
      - Si $d = 7$, podemos elegir a c de una manera ($c = 6$).
      - Si $d = 9$, podemos elegir a c de 3 maneras ($6 \leq c \leq 8$).

   e) Si $b = 6$, a puede tomar 5 valores ($1 \leq a \leq 5$).
      - Si $d = 8$, podemos elegir a c de una manera ($c = 7$).

   f) Si $b = 7$, a puede tomar 6 valores ($1 \leq a \leq 6$)
      - Si $d = 9$, podemos elegir a c de una manera ($c = 8$).

   Por lo tanto, hay $1(1+3+5)+2(1+3+5)+3(1+3)+4(1+3)+5(1)+6(1) = 66$ números parientes.

   Solución alternativa. Para que $\overline{abcd}$ sea pariente, basta que b y d tengan la misma paridad. Notemos que para cada b, hay $b-1$ formas de elegir a a, pues $1 \leq a < b$. Como $b \equiv d \pmod 2$, tenemos que $d = b + 2k$ para algún $k \geq 1$. Como $d \leq 9$, tenemos que $b + 2k \leq 9$, de donde $k \leq \frac{9-b}{2}$. Como $b < c < d$, hay $2k - 1$ opciones para tomar a c y entonces para cada b hay

$$(b-1)\Big(1 + 3 + 5 + \cdots + \left\lfloor \frac{9-b}{2} \right\rfloor\Big) = (b-1)\left\lfloor \frac{9-b}{2} \right\rfloor^2$$

   números posibles. Como $0 < a < b$ y $b \geq 2$, la respuesta es

$$\begin{aligned} &\sum_{b=2}^{9}(b-1)\left\lfloor \frac{9-b}{2} \right\rfloor^2 \\ &= 1 \times 3^2 + 2 \times 3^2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^2 + 5 \times 1^2 + 6 \times 1^2 + 7 \times 0^2 + 8 \times 0^2 \\ &= 66. \end{aligned}$$

4) Para facilitar las cuentas, vamos a enfocarnos en los meses del año. Notemos que todas las fechas dd/mm de Enero, Febrero y Marzo tienen su correspondiente año tal que $dd \times mm = yy$, ya que el mayor producto posible es $31 \times 3 = 93$ y el año es un número entre 00 y 99. Como Enero tiene 31 días, Febrero tiene 28 días y Marzo tiene 31 días, entre estos tres meses tenemos 90 fechas homogénicas (observemos que el 29 de Febrero no es una fecha homogénica, ya que $29 \times 2 = 58$ y ningún año que termine en 58 puede ser bisiesto ya que 58 no es múltiplo de 4). Para ver cuántas fechas homogénicas tiene cada uno de los meses restantes, basta con dividir 99 entre el número del mes. Por ejemplo, Abril tiene 24 fechas homogénicas, desde el 01/04 hasta el 24/04 (el 25/04 no es homogénica ya que $25 \times 4 > 99$).
El quinto mes tiene $\lfloor 99/5 \rfloor = 19$ fechas homogénicas.
El sexto mes tiene $\lfloor 99/6 \rfloor = 16$ fechas homogénicas.
El séptimo mes tiene $\lfloor 99/7 \rfloor = 14$ fechas homogénicas.
El Octavo mes tiene $\lfloor 99/8 \rfloor = 12$ fechas homogénicas.
El noveno mes tiene $99/9 = 11$ fechas homogénicas.
El décimo mes tiene $\lfloor 99/10 \rfloor = 9$ fechas homogénicas.
El décimo primer mes tiene $99/11 = 9$ fechas homogénicas.
El décimo segundo mes tiene $\lfloor 99/12 \rfloor = 8$ fechas homogénicas.
En total hay $90+24+19+16+14+12+11+9+9+8 = 212$ fechas homogénicas en un siglo.

5) La respuesta es 920. Hay 6 formas de tener al menos un 4 y al menos un 3.
Con un 4 y un 3, donde al menos uno ocupa el lugar de las unidades de millar, tenemos $6 \times 64 = 384$ números.
Con un 4 y un 3, donde ninguno de ellos ocupa el lugar de las unidades de millar, tenemos $6 \times 7 \times 8 = 336$ números.
Con dos 4's y un 3 o viceversa, donde uno de ellos ocupa el lugar de las unidades de millar, tenemos $18 \times 8 = 144$ números.
Con dos 4's y un 3 o viceversa, donde ninguno de ellos ocupa el lugar de las unidades de millar, tenemos $6 \times 7 = 42$ números.
Con dos 4's y dos 3's, hay 6 números.
Con tres 4's y un 3 o viceversa, hay 8 números.
En total hay $384 + 336 + 144 + 42 + 6 + 8 = 920$ números.

Solución alternativa. Como el primer dígito debe estar entre 1 y 9 y el resto entre 0 y 9, entonces hay un total de $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$ números de cuatro dígitos. Veamos ahora cuántos números de cuatro dígitos no tienen un 3. Como el primer dígito no puede ser 0 ni 3, entonces puede escogerse de 8 formas y cada uno de los dígitos restantes puede escogerse de 9 formas, por lo que hay $8 \times 9 \times 9 \times 9 = 5832$ números de cuatro dígitos que no contienen un 3. De manera análoga obtenemos que hay 5832 números que no contienen un 4. Contemos ahora cuántos números de cuatro dígitos no tienen 3 ni 4. Como el primer dígito no puede ser 0, 3 o 4, entonces puede ser escogido de 7 formas y como los demás dígitos no pueden ser 3 ni 4, entonces cada uno de ellos puede ser escogido de 8 maneras, por lo que hay $7 \times 8 \times 8 \times 8 = 3584$ números de cuatro dígitos que no contienen un 3 ni un 4. Finalmente, hay $5382 + 5382 - 3584 = 8080$ números de cuatro dígitos que no contienen un 3 o un 4. Por lo tanto, la respuesta es $9000 - 8080 = 920$.

6) Hay 10 posibles maneras de elegir 3 días de lunes a viernes, como se muestra en la siguiente tabla:

	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes
1	•	•	•		
2		•	•	•	
3			•	•	•
4	•	•		•	
5	•	•			•
6		•	•		•
7	•		•	•	
8	•			•	•
9		•		•	•
10	•		•		•

Así, el máximo número posible de personas es 10. Podemos contar el número de asistencias semanales multiplicando por 3 al número de personas, quedando como posibles números de asistencias semanales

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.$$

Como cada día asiste la misma cantidad de personas, excepto el miércoles que asiste una menos, al número de asistencias semanales le faltaría 1 para ser múltiplo de 5. Luego, las únicas opciones posibles para el número de asistencias semanales son 9 y 24, que corresponden a 3 y 8 personas, respectivamente. Si el número de personas fuera 3, tendrían que asistir 2 personas cada día, excepto el miércoles que solo asistiría una, pero sabemos que al menos la mitad de las personas asistió cada día y eso no se cumpliría el miércoles. Por lo tanto, la única opción posible es que en la oficina de César haya 8 personas. Un posible horario se obtendría eliminando las líneas 1 y 3 de la tabla anterior.

7) La respuesta es 11700. La factorización en primos de 2022 es $2 \times 3 \times 337$, por lo que los rectángulos posibles tienen dimensiones: 6×337, 3×674, 2×1011 o 1×2022. Ahora, como las bisectrices de los ángulos de un rectángulo forman ángulos de $45°$, si P y Q son las intersecciones de las bisectrices de $\angle ABC$ y $\angle BCD$ con AD, entonces $AD = DP$ y $BC = CQ$. Si el lado menor del rectángulo es menor que la mitad del lado mayor, P estará más cerca de D y Q estará más cerca de C. Si llamamos a al lado menor y b al mayor, entonces el producto de las medidas de la partición es $a(b-2a)a = a^2(b-2a)$. A continuación analizamos los 4 casos.

a) Caso 6×337. La partición da como producto: $6^2 \times 325 = 11700$.

b) Caso 3×668. La partición da como producto: $3^2 \times 668 = 6012$.

c) Caso 2×1007. La partición da como producto: $2^2 \times 1007 = 4028$.

d) Caso 1×2020. La partición da como producto: $1^2 \times 2022 = 2022$.

Así, el valor máximo es 11700 para el caso de un rectángulo de 6×337.

8) Sean $a = (APF) = (PEF)$, $b = (BPC) = (PDC)$, $x = (APB)$ y $y = (DPE)$. Dado que DC, BE y AF son paralelas entre sí, tenemos que

$$\frac{b}{y} = \frac{(PBC)}{(PDE)} = \frac{PB}{PE} = \frac{(PAB)}{(PEF)} = \frac{x}{a},$$

de donde

$$(APB) \cdot (DPE) = xy = ab = \frac{(2a)(2b)}{4} = \frac{(APEF) \cdot (BPDC)}{4}.$$

Competencia Internacional de Matemáticas 2022 (Nivel Elemental)

La Competencia Internacional de Matemáticas del año 2022 (IIMC 2022), se llevó a cabo de forma virtual del 30 de junio al 6 de julio de 2022 y fue organizada por Indonesia. En esta ocasión, México participó con dos equipos de Primaria y dos equipos de Secundaria, obteniendo una medalla de plata, 6 medallas de bronce y 5 menciones honoríficas, en las pruebas individuales. En las pruebas por equipos, se obtuvieron una medalla de plata y 3 medallas de bronce. En el Torneo Puzzle un participante de Primaria obtuvo una mención honorífica.
La prueba individual del nivel elemental, consiste de 15 preguntas en el que se requiere que las respuestas sean solo números (nada de andar tratando de explicar o poner anotaciones). Son 90 minutos, cada problema vale 10 puntos y no hay puntos parciales. La mayoría de los problemas son retadores pero no exageradamente complicados; este tipo de problemas normalmente requieren algún pequeño truco, teoremita o simplemente mucha rapidez para hacer cuentas.
Las reglas de la prueba por equipos son las mismas tanto para el nivel elemental (Primaria) como para el nivel Secundaria. En ambos casos, los equipos están formados por 4 integrantes (del mismo país) y empiezan la prueba juntos. Reciben 8 problemas, cada uno impreso en una hoja individual. Empieza a correr el tiempo y tienen 10 minutos para hablar y decidir quién resolverá cuál problema, sin hacer anotaciones de ningún tipo; cada integrante debe tener al menos un problema, los problemas impares requieren solo respuesta mientras que los problemas pares requieren solución y sí pueden recibir puntos parciales. Terminados esos 10 minutos, cada integrante del equipo debe trabajar de manera individual durante 35 minutos para resolver los problemas que eligió. Al concluir esos 35 minutos, deben entregar sus hojas y vuelven a juntarse. Reciben 2 problemas más y tienen 25 minutos para resolverlos trabajando en equipo. La prueba completa dura 70 minutos.
En la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) se premia Oro, Plata, Bronce

y Mención Honorífica en proporción 1:2:3:4. A diferencia de otros países participantes como India, Irán o Estados Unidos, México realiza un largo proceso selectivo, en busca de mejores resultados. Desde que un participante presenta su primer examen en su estado hasta que presenta el examen de la IMC, pueden pasar hasta dos años. Los estudiantes mexicanos que participaron en esta IMC, se seleccionaron de las preselecciones del Concurso Nacional de la 5^a OMMEB realizada en el mes de junio de 2021 de forma virtual.

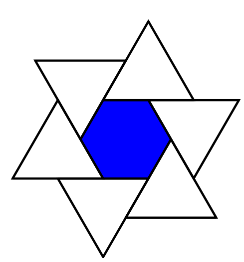
Los resultados individuales de los equipos de Primaria en la IIMC 2022 fueron los siguientes.

Nombre	**Estado**	**Medalla**	**Equipo**
Elisa María Villarreal Corona	Cd. de México	Bronce	A
Fernando Gael Martín Barajas	Cd. de México	M. H.	A
Álvaro Valdez Llanes	Jalisco		A
Derek Elías Ortiz	Zacatecas		A
Zariffe Yamel Céspedes Pelayo	Hidalgo	Bronce	B
Gonzalo Díaz Mercado	Morelos	M. H.	B
Isaac Azael Juárez Martínez	San Luis Potosí	M. H.	B
Christopher R. Rodríguez Moguel	Yucatán	M. H. (Puzzle)	B

En la prueba por equipos, los dos equipos de Primaria obtuvieron medalla de bronce. Las medallas por equipos se otorgan a los mejores puntajes obtenidos en la prueba por equipos.
Los profesores que participaron como líderes y colíderes de cada equipo fueron: Carlos Jacob Rubio Barrios (líder del Equipo A), Denisse Alejandra Escobar Parra (colíder del Equipo A), César Guadarrama Uribe (líder del Equipo B) y María Guadalupe Russell Noriega (colíder del Equipo B).
A continuación presentamos los problemas y soluciones de la prueba individual y de la prueba por equipos en el nivel elemental (Primaria) de la IMC del año 2022.

Examen Individual, Nivel Elemental (Primaria)

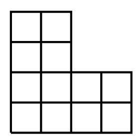
Problema 1. La figura está compuesta por seis triángulos equiláteros idénticos y un hexágono regular, de manera que la razón entre la longitud del lado del triángulo equilátero y la longitud del lado del hexágono regular es $2:1$. Si el área de la figura completa es 45 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del hexágono regular?



Problema 2. En una papelería, el costo por unidad, en dólares, de una libreta es un número entero. El costo de comprar nueve libretas idénticas es mayor a 1100 pero menor a 1200 dólares, mientras que el costo de comprar trece libretas idénticas es mayor a 1500 pero menor a 1600 dólares. ¿Cuál es el costo, en dólares, de una libreta?

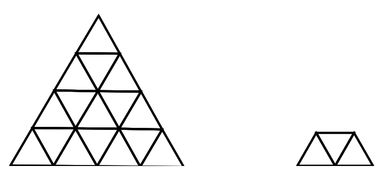
Problema 3. El promedio obtenido por una clase de 100 estudiantes en un examen es 79. Si el promedio obtenido por todas las niñas de la clase es 75, mientras que el promedio obtenido por los niños de la clase es el mismo que el número de niños en la clase, ¿cuántas niñas hay en la clase?

Problema 4. A continuación se muestra una figura "en forma de L" que está compuesta por cuadrados de 1×1 unidades. Kitty corta la figura a lo largo de las líneas de la cuadrícula para obtener dos piezas. Después, ella usa las piezas para formar un rectángulo de 2×6, donde se permite que las piezas sean rotadas o volteadas. ¿Cuál es la menor diferencia positiva entre las áreas, en unidades cuadradas, de las dos piezas?



Problema 5. Hay ocho volcanes grandes y seis volcanes pequeños en Indonesia. Los volcanes grandes hacen erupción cada tres años y los volcanes pequeños hacen erupción cada dos años. Si hubieron 30 erupciones en los últimos cinco años, ¿cuántos volcanes harán erupción este año?

Problema 6. La figura de la izquierda está hecha por cinco copias de la figura de la derecha, llamada *token*, y un triángulo unitario.



¿En cuántas posiciones podemos colocar el triángulo unitario sobre el tablero, de manera que el resto del tablero pueda ser completamente cubierto por los 5 tokens restantes? (Nota: Los tokens se pueden rotar y voltear).

Problema 7. En una competencia de Matemáticas, las puntuaciones de 10 estudiantes, los cuales son enteros positivos, se muestran en la tabla de abajo, excepto para la puntuación de Grace.

Alice	Bob	Carla	David	Eric	Freya	Grace	Helen	Ivory	Jordan
23	6	14	13	23	9	?	12	29	19

El comité recuerda que la diferencia entre el promedio de las seis puntuaciones más altas y el promedio de las seis puntuaciones más bajas es 12. ¿Cuál es la suma de todas las posibles puntuaciones obtenidas por Grace?

Problema 8. En el siguiente tablero de 3×3, algunas casillas fueron previamente llenadas con enteros positivos.

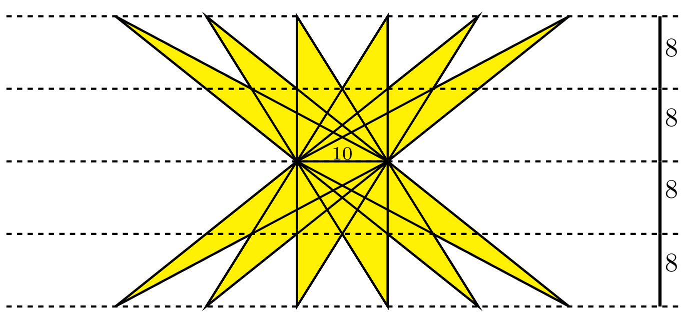
1	8	
		10
4		

Nuestra meta es escribir un entero positivo en cada una de las casillas vacías restantes de manera que se cumplan las siguientes dos condiciones:

- Todos los nueve números enteros escritos en el tablero son diferentes entre ellos.
- La suma de los cuatro enteros en cualquier cuadrado de 2×2 es siempre la misma.

Encuentra el menor valor posible de la suma de los nueve enteros en el tablero.

Problema 9. Hay cinco líneas punteadas paralelas horizontales y la distancia entre dos líneas punteadas adyacentes es 8 cm, como lo muestra la figura. Si la longitud del segmento de la línea punteada de en medio es 10 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, de la región sombreada?



Problema 10. Sea $A = \dfrac{2021^{2022} + 2022^{2023} + 2023^{2024}}{2021^{2021} + 2022^{2022} + 2023^{2023}}$.

¿Cuál es el mayor número entero que no excede a A?

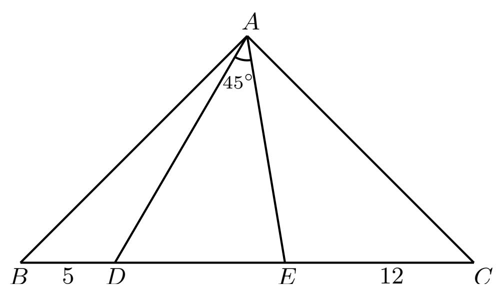
Problema 11. El Capitán Crook y cinco miembros de su equipo se sientan en una mesa redonda, compartiendo 99 monedas. Si al menos tres de los cinco miembros del equipo tienen más monedas que cada uno de sus dos vecinos, ¿cuál es el máximo número de monedas que puede tener el Capitán Crook?

Problema 12. Supongamos que $\overline{ABC}$, $\overline{DEF}$ y $\overline{GHI}$ son números de tres dígitos tales que

- $\overline{ABC} + \overline{DEF} + \overline{GHI} = 2022$,
- los nueve dígitos son distintos y,
- $\overline{ABC} < \overline{DEF} < \overline{GHI}$.

¿Cuál es el mayor valor posible de $\overline{ABC}$?

Problema 13. En la figura, ABC es un triángulo donde $AB = AC$ y $\angle BAC = 90°$. Los puntos D y E están sobre BC y satisfacen que $\angle DAE = 45°$. Si $BD = 5$ cm y $EC = 12$ cm, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo ABC?

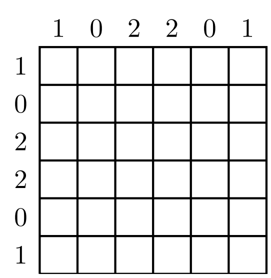


Problema 14. Queremos quitar algunos números del siguiente conjunto:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

de manera que el producto de los números restantes sea un múltiplo de cada uno de los números $1, 2, 3, \ldots, 14, 15$. ¿A lo más, cuántos números podemos quitar?

Problema 15. Queremos colocar algunas estrellas en las casillas del tablero de 6×6 que se muestra abajo, de manera que el número escrito hasta arriba de cada columna sea igual a la cantidad total de estrellas en esa columna, mientras que el número escrito a la izquierda de cada fila sea igual a la cantidad total de estrellas en esa fila. ¿De cuántas maneras diferentes podemos colocar las estrellas? (Nota: Cada casilla puede tener a lo más una estrella).



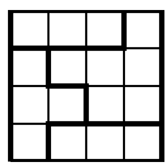
Examen por Equipos, Nivel Elemental (Primaria)

Problema 1. En la Víspera de Año Nuevo, un grupo de niños se reúnen para jugar un simple juego matemático. El primer niño escribe 2022 en un pizarrón. A partir del segundo niño, cada uno reemplaza el número escrito por el niño anterior por el producto de los dígitos de ese número más 12. ¿Qué número escribió el $59°$ niño?

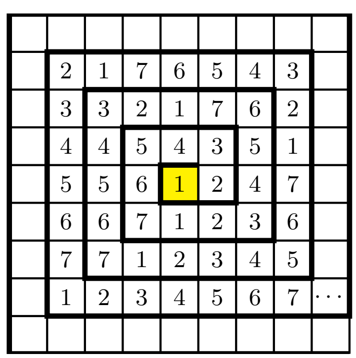
Problema 2. En cada casilla de la cuadrícula de abajo, escribe exactamente uno de los números 1, 2, 3 o 4 de manera que:

- En cada fila y columna, los cuatro números escritos son distintos y,
- para cada región resaltada en negrita, la suma o el producto de los números escritos es igual a 12.

Explica tu razonamiento.



Problema 3. Llena la cuadrícula infinita con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4, $5, \ldots$ (los números del 1 al 7, repetidamente) de forma espiral en sentido contrario a las manecillas del reloj, comenzando con la casilla sombreada, como se muestra en la figura. ¿Qué número está escrito en la casilla que está localizada en la posición 2022 al contar las casillas hacia abajo de la casilla sombreada?



Problema 4. Selecciona cualquier entero positivo n y escribe los enteros del 0 al n, inclusive, en algún orden y sin espacios.
¿Cuál es el mínimo valor de n para el cual la cadena resultante puede tener el mismo valor cuando se lee al derecho y al revés? ¿Cuál es la cadena resultante?

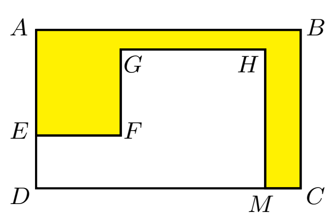
Problema 5. Un entero positivo de cuatro dígitos es llamado *bueno* si consiste de dos parejas de los mismos dígitos en algún orden pero no todos los cuatro dígitos son iguales. Por ejemplo, los números 2211, 2424 y 7007 son buenos, mientras que 5555 y 3111 no lo son. Encuentra la cantidad de enteros positivos de cuatro dígitos buenos que son divisibles por 7 o por 101, pero no son divisibles por ambos.

Problema 6. En un grupo de cinco personas, las edades de cuatro de ellos se conocen y son 21, 53, 19 y 60. Se sabe que el promedio de las edades de las cinco personas es un número impar. Si ordenamos las edades de las cinco personas en orden creciente, entonces la edad de en medio es un múltiplo de 3. Calcula la suma de todos los posibles valores para la edad faltante.

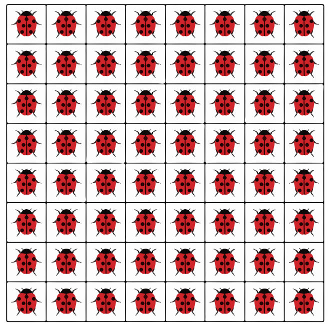
Problema 7. Cinco jugadores de ajedrez, Andy, Boris, Clark, Dick y Eric juegan un torneo, donde cualesquiera dos participantes juegan entre ellos exactamente una vez. Para cada juego, un jugador obtiene 2 puntos por una victoria, 1 punto por un empate y 0 puntos por una derrota. Al final del torneo, uno se da cuenta que: Boris empató todos sus juegos, Clark ganó exactamente dos juegos, Dick está por delante de Andy por 1 punto, Eric no está en el último lugar y perdió solamente con el único jugador que acumuló la menor cantidad de puntos. Si los puntajes totales son a, b, c, d, e, respectivamente, ¿cuál es el número de cinco dígitos $\overline{abcde}$?

	Andy	Boris	Clark	Dick	Eric	**Total**
Andy						a
Boris						b
Clark						c
Dick						d
Eric						e

Problema 8. Una hoja de papel rectangular es cortada en dos piezas como se muestra en la figura, en donde una región es sombreada. Los ocho lados de la región sombreada tienen longitudes de 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm y 8 cm, en algún orden. ¿Cuáles son la máxima y mínima áreas posibles, en cm^2, de la región que no está sombreada?



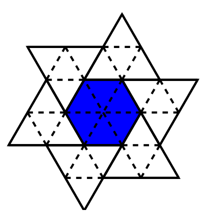
Problema 9. En un tablero de 8×8, cada casilla tiene un insecto. Después de que suena una campana, todos los insectos brincan a una casilla adyacente en la misma fila o la misma columna y no brincan afuera del tablero. Cada casilla puede estar vacía, tener uno o tener más de un insecto. ¿Cuál es el máximo número de casillas vacías que puede haber después de que suena la campana?



Problema 10. Arreglamos los siguientes números de cuatro dígitos: 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026 y 2027 en una fila, de manera que cualesquiera dos números adyacentes son primos relativos. Por ejemplo: 2027, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2021 es uno de esos arreglos. ¿Cuántos arreglos diferentes cumplen esta condición?

Soluciones del Examen Individual

Solución del Problema 1. La respuesta es 9. Cada triángulo equilátero de lado 2 cm, puede ser dividido en 4 triángulos equiláteros de lado 1 cm, como se muestra en la figura. De manera similar, el hexágono regular se puede dividir en 6 triángulos equiláteros de lado 1 cm.

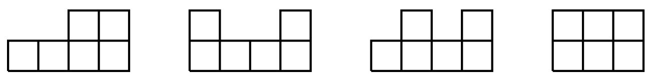


Entonces, la figura está compuesta por $6 \times 4 + 6 = 30$ triángulos equiláteros de lado 1 cm. Como el área de toda la figura es 45 cm^2, cada triángulo equilátero de lado 1 cm tiene área $\frac{45}{30} = 1.5$ cm^2. Por lo tanto, el área del hexágono es $1.5 \times 6 = 9$ cm^2.

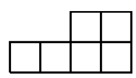
Solución del Problema 2. La respuesta es 123. Como nueve libretas idénticas cuestan más de 1100 y menos de 1200 dólares, una libreta cuesta más de $\frac{1100}{9} = 122\frac{2}{9}$ y menos de $\frac{1200}{9} = 133\frac{1}{3}$ dólares. Como trece libretas idénticas cuestan más de 1500 y menos de 1600 dólares, una libreta cuesta más de $\frac{1500}{13} = 115\frac{5}{13}$ y menos de $\frac{1600}{13} = 123\frac{1}{13}$ dólares. Combinando ambas condiciones, llegamos a que el costo de una libreta es mayor que $122\frac{2}{9}$ dólares y menor que $123\frac{1}{13}$ dólares. Como el costo de una libreta es un número entero, entonces el costo debe ser 123 dólares.

Solución del Problema 3. La respuesta es 20. Como la calificación promedio de todos los estudiantes es 79, la suma de las calificaciones de los 100 estudiantes es 7900. Si hay n niños en clase, su calificación promedio también es n por hipótesis y, la suma de las calificaciones de los niños, es igual a n^2. Como hay $100 - n$ niñas en la clase y su promedio es 75, la suma de las calificaciones de las niñas es igual a $75(100 - n)$. Entonces, tenemos que $n^2 + 75(100 - n) = 7900$, esto es, $(n - 80)(n + 5) = 0$, de donde $n = 80$ o $n = -5$. Como $n > 0$, la única opción es $n = 80$. Por lo tanto, el número de niñas en la clase es igual a $100 - 80 = 20$.

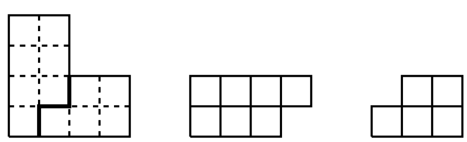
Solución del Problema 4. La respuesta es 2. Como hay 12 cuadrados de 1×1, la mínima diferencia posible entre las áreas de las dos piezas es 0, donde cada pieza tiene área 6. Para formar un rectángulo de 2×6, cada pieza tiene a lo más dos columnas. Hay cuatro posibles maneras de armar una pieza de área 6 dentro de un rectángulo de 2×6 (ignorando rotaciones y reflexiones). Tres de ellas salen de tomar los 4 cuadrados de 1×1 de la fila de abajo y 2 cuadrados de 1×1 en la fila de arriba. La cuarta manera es tomar un rectángulo de 2×3.



De estas cuatro maneras solo dos de ellas podrían usarse para construir el rectángulo de 2×6, ya sea usar dos rectángulos de 2×3 o usar dos piezas como la siguiente

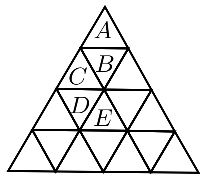


Sin embargo, estas dos piezas no se pueden obtener al mismo tiempo cortando la figura en forma de L en cualquier caso. Entonces, la diferencia mínima posible entre las áreas de las dos piezas es 2. A continuación mostramos cómo debe hacerse el corte, obteniendo una pieza de área 7 y una pieza de área 5. Observe que una pieza debe ser volteada.

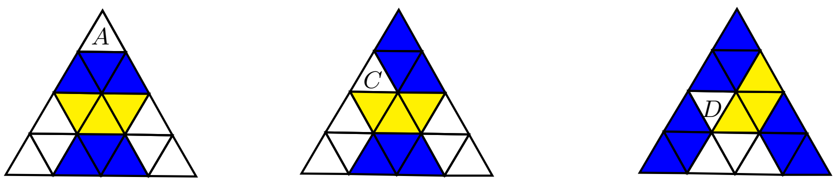


Solución del Problema 5. La respuesta es 4. Considera los últimos cinco años junto con el año actual (son 6 años en total). Como los volcanes grandes hacen erupción cada tres años, cada uno de los 8 volcanes grandes debe eruptar 2 veces en los últimos 6 años. Como los volcanes chicos hacen erupción cada dos años, cada uno de los 6 volcanes chicos debe eruptar 3 veces en los últimos 6 años. En total, son $8 \times 2 + 6 \times 3 = 34$ erupciones en los últimos 6 años. Como hubo 30 erupciones en los últimos 5 años, habrá $34 - 30 = 4$ erupciones en el año actual.

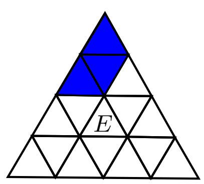
Solución del Problema 6. La respuesta es 12. Hay esencialmente 5 casos a considerar, los otros se pueden obtener con reflexiones o rotaciones. Consideremos la siguiente figura, donde hemos etiquetado a cinco triángulos correspondientes a cada caso.



Es fácil ver que, si al final tenemos un triángulo sin cubrir, este no puede ser B, ya que el triángulo A quedaría solo y no puede ser cubierto por un token.
Por otro lado, es posible que A, C y D queden sin cubrir, como se muestra a continuación.



Demostraremos que el triángulo E no puede ser el triángulo sin cubrir restante. En efecto, si fuera posible hay dos formas en que se puede colocar un token para cubrir el triángulo arriba de E. Como esas formas son simétricas, podemos asumir que el token se coloca como se muestra a continuación.



Entonces, solo hay una manera de cubrir el triángulo a la izquierda de E y, después de hacerlo, no es posible cubrir el triángulo de la esquina inferior izquierda.
Por lo tanto, hay 4 triángulos que no pueden quedar sin cubrir: el triángulo central y aquellos que se obtienen por rotación del triángulo B. Luego, hay $16 - 4 = 12$ triángulos que pueden dejarse descubiertos al poner 5 tokens.

Solución del Problema 7. La respuesta es 37. Sea x la puntuación de Grace. Sabemos que $x \geq 0$. La lista de las puntuaciones de todos los estudiantes, excepto Grace, en orden ascendente son: 6, 9, 12, 13, 14, 19, 23, 23, 29. Notemos que las puntuaciones 14, 19, 23, 23, 29 deben estar entre las seis puntuaciones más altas y, las puntuaciones 6, 9, 12, 13, 14, deben estar entre las seis puntuaciones más bajas.
Caso 1: Supongamos que $x < 13$. Tenemos la ecuación,

$$\frac{13+14+19+23+23+29}{6} - \frac{6+9+12+13+14+x}{6} = 12,$$

que es equivalente a la ecuación $121 - 54 - x = 72$, de donde obtenemos la solución $x = -5$, lo que es una contradicción.
Caso 2: Supongamos que $13 \leq x \leq 19$. Tenemos la ecuación,

$$\frac{x + 14 + 19 + 23 + 23 + 29}{6} - \frac{6 + 9 + 12 + 13 + 14 + x}{6} = 12,$$

que se reduce a la igualdad $54 = 72$, lo cual es un absurdo.
Caso 3: Supongamos que $x > 19$. Tenemos la ecuación,

$$\frac{x + 14 + 19 + 23 + 23 + 29}{6} - \frac{6 + 9 + 12 + 13 + 14 + 19}{6} = 12,$$

que es equivalente a la ecuación $108 + x - 73 = 72$, de donde obtenemos la solución $x = 37$.
Por lo tanto, la única puntuación posible de Grace es 37 y, en consecuencia, la suma de todas las posibles puntuaciones obtenidas por Graces es 37.

Solución del Problema 8. La respuesta es 51. Sean c y x los números que deben ir en el centro y en la esquina superior derecha del tablero, respectivamente. Notemos que la suma de los cuatro números en cualquier cuadrado de 2×2 debe ser $18 + c + x$.

1	8	x
	c	10
4		

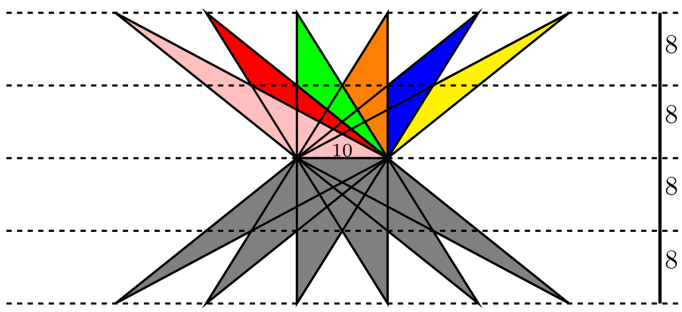
Entonces, en la casilla a la izquierda del centro debe estar el número $x + 9$. Luego, en la casilla debajo del centro debe ir el número 5 y en la esquina inferior derecha debe ir el número $x + 3$.

1	8	x
$x+9$	c	10
4	5	$x+3$

Como los números son positivos y distintos, entonces $c \geq 2$ y $x \geq 2$. Si $x = 2$, entonces el número $x + 3 = 5$ se repite. Luego, $x \geq 3$. Por lo tanto, la suma de los 9 enteros es $3x + c + 40$ y es al menos 51. Escogiendo $c = 2$ y $x = 3$, obtenemos 9 números distintos que suman 51.

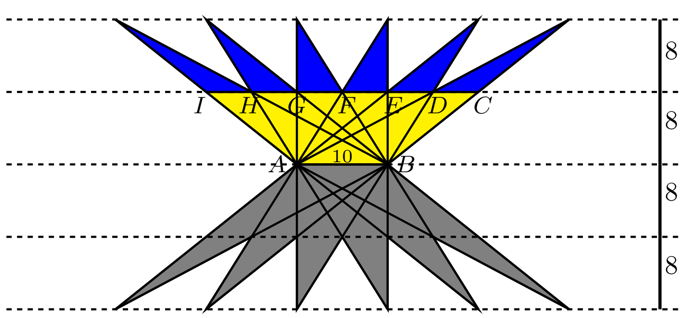
1	8	3
12	2	10
4	5	6

Solución del Problema 9. La respuesta es 560. Por la simetría de la figura, basta calcular la mitad superior del área sombreada. Dividamos a esa mitad en triángulos que no comparten área, cada uno de base 10 cm, como se muestra a continuación. Cada una de las áreas de los triángulos amarillo, azul, naranja, verde y rojo es igual a $10 \times 16/2 - 10 \times 8/2 = 40$ cm^2, mientras que el área del triángulo rosa es igual a $10 \times 16/2 = 80$ cm^2.



Luego, el área de la mitad superior es igual a la suma de las áreas de estos seis triángulos, esto es, $40 \times 5 + 80 = 280$ cm^2 y, por lo tanto, el área de toda la figura es igual a $2 \times 280 = 560$ cm^2.

Solución alternativa. Consideremos los puntos marcados en la siguiente figura. Como las 5 rectas horizontales son paralelas, tenemos que CD mide la mitad de AB, esto es, $CD = 5$ cm. De manera análoga, tenemos que $DE = EF = FG = GH = HI = 5$ cm. Entonces, el área total de los seis triángulos azules es igual a $\frac{5 \times 8}{2} \times 6 = 120$ cm^2.



Por otro lado, la figura sombreada de color amarillo es un trapecio y su área es igual a $\frac{(AB+CI)\times 8}{2} = \frac{(10+5\times 6)8}{2} = 160$ cm^2. Por lo tanto, el área de la región azul y amarilla es igual a $120 + 160 = 280$ cm^2, la cual representa la mitad del área de toda la figura.

Solución del Problema 10. La respuesta es 2022. Tenemos que

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2021^{2022}+2022^{2023}+2023^{2024}}{2021^{2021}+2022^{2022}+2023^{2023}}\\
&= \frac{2021(2021^{2021})+2022(2022^{2022})+2023(2023^{2023})}{2021^{2021}+2022^{2022}+2023^{2023}}\\
&= \frac{2021(2021^{2021})+2021(2022^{2022})+2021(2023^{2023})+2022^{2022}+2(2023^{2023})}{2021^{2021}+2022^{2022}+2023^{2023}}\\
&= 2021+\frac{2022^{2022}+2(2023^{2023})}{2021^{2021}+2022^{2022}+2023^{2023}}\\
&= 2021+\frac{2023^{2023}+2022^{2022}+2023^{2023}}{2021^{2021}+2022^{2022}+2023^{2023}}\\
&= 2021+1+\frac{2023^{2023}-2021^{2021}}{2021^{2021}+2022^{2022}+2023^{2023}}.
\end{aligned}$$

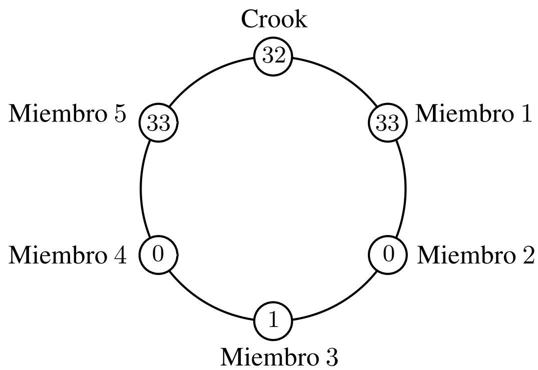
Como $0 < 2023^{2023} - 2021^{2021} < 2021^{2021} + 2022^{2022} + 2023^{2023}$, tenemos que $2022 < A < 2023$. Por lo tanto, el mayor entero que no excede a A es 2022.

Solución alternativa. Sean $a = 2021^{2021}$, $b = 2022^{2022}$ y $c = 2023^{2023}$. Tenemos que $a < b < c$ y

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2021(2021^{2021})+2022b+2023c}{a+b+c} = 2021+\frac{b+2c}{a+b+c}\\
&= 2021+\frac{(a+b+c)+(c-a)}{a+b+c} = 2022+\frac{c-a}{a+b+c}.
\end{aligned}$$

Como $0 < c-a < a+b+c$, tenemos que $2022 < A < 2023$ y concluimos como en la primera solución.

Solución del Problema 11. La respuesta es 32. Numeremos a los miembros del 1 al 5 en orden cíclico. Tenemos que dos miembros en asientos adyacentes no pueden tener más monedas que cada uno de sus dos vecinos. Entonces, hay exactamente 3 miembros que tienen más monedas que cada uno de sus dos vecinos. Llamemos a esos miembros 1, 3 y 5. Podemos darle una moneda al Miembro 3, ninguna moneda a los Miembros 2 y 4, y 33 monedas a cada uno de los Miembros 1 y 5, dejando 32 monedas para el Capitán Crook. Si él consiguiera al menos 33 monedas, entonces cada uno de los Miembros 1 y 5, deben tener al menos 34 monedas. Pero esto no es posible ya que $33+2\times 34 = 101 > 99$. Por lo tanto, el máximo número de monedas que puede tener el Capitán Crook es 32.



Solución del Problema 12. La respuesta es 597. Como $0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$, que es divisible por 9 y, $2022 = 9 \times 224 + 6$, el dígito que no aparece en ninguno de los números $\overline{ABC}$, $\overline{DEF}$ y $\overline{GHI}$, es el 3. Entonces, la suma de todos los dígitos desde A hasta I es $45 - 3 = 42$. Sean $X = A + D + G$, $Y = B + E + H$ y $Z = C + F + I$. Tenemos que $100X + 10Y + Z = 2022$ y $X + Y + Z = 42$. Notemos que $3 = 0 + 1 + 2 \leq X, Y, Z \leq 7 + 8 + 9 \leq 24$. Como la suma de los tres números de tres dígitos tiene dígito de las unidades igual a 2 (pues la suma es igual a 2022), el dígito de las unidades de Z debe ser igual a 2. Como $3 \leq Z \leq 24$, hay dos posibilidades: $Z = 12$ o $Z = 22$.
Si $Z = 12$, entonces $X + Y = 30$ y

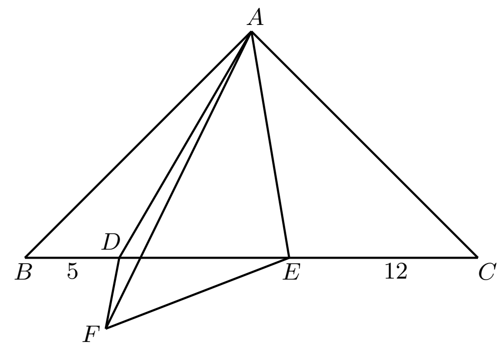
$$2022 = 100X + 10Y + Z = 100X + 10(30 - X) + 12 = 90X + 312,$$

de donde se sigue que $X = 19$ y $Y = 30 - X = 11$.
Si $Z = 22$, entonces $X + Y = 20$ y

$$2022 = 100X + 10(20 - X) + 22 = 90X + 222,$$

de donde se sigue que $X = 20$ y $Y = 20 - X = 0$, lo cual no puede ser ya que $Y \geq 3$. Por lo tanto, $Z = C + F + I = 12$, $Y = B + E + H = 11$ y $X = A + D + G = 19$. Como $A < D < G$, tenemos que $A \leq 5$, ya que en caso contrario, tendríamos que $A + D + G \geq 6 + 7 + 8 > 19$. Si $A = 5$, entonces $D = 6$ y $G = 8$. Como el dígito 8 ha sido usado en G, el valor más grande posible para $\overline{ABC}$ es 597. Para concluir que el valor máximo para $\overline{ABC}$ es 597, asignemos los dígitos restantes 0, 1, 2 y 4 a E, F, H y I, de tal manera que $7 + F + I = 12$ y $9 + E + H = 11$. Es fácil ver que podemos escoger $F = 1$, $I = 4$, $E = 0$ y $H = 2$, en cuyo caso obtenemos que $\overline{ABC} + \overline{DEF} + \overline{GHI} = 597 + 601 + 824 = 2022$.

Solución del Problema 13. La respuesta es 225. Tracemos el segmento AF de tal manera que $\angle FAE = \angle CAE$ y $AF = AC = AB$. Ahora tracemos los segmentos DF y EF.



Como $AE = AE$, $\angle FAE = \angle CAE$ y $AF = AC$, los triángulos FAE y CAE son congruentes por el criterio LAL. Entonces $EF = EC = 12$ cm, $\angle AFE = \angle ACE$ y $\angle AEF = \angle AEC$.
Por otro lado, tenemos que $\angle BAD + \angle EAC = \angle BAC - \angle DAE = 90° - 45° = 45°$, lo cual implica que $\angle BAD = 45° - \angle EAC = 45° - \angle EAF = \angle FAD$.
Ahora, como $AD = AD, \angle BAD = \angle FAD$ y $AF = AB$, los triángulos FAD y BAD son congruentes por el criterio LAL. Entonces, $DF = BD = 5$ cm y $\angle AFD = \angle ABD$. Luego, tenemos que

$$\angle DFE = \angle AFD + \angle AFE = \angle ABD + \angle ACE = 180° - \angle BAC = 90°$$

y, por lo tanto, $DE^2 = DF^2 + EF^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$, esto es, $DE = 13$ cm. En consecuencia, $BC = BD + DE + EC = 5 + 13 + 12 = 30$ cm. Como $AB = AC$ y $\angle BAC = 90°$, tenemos que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ y, por lo tanto, $AB^2 = \frac{BC^2}{2}$. Entonces, el área del triángulo ABC es igual a

$$\frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{AB^2}{2} = \frac{BC^2}{4} = \frac{900}{4} = 225 \text{ cm}^2.$$

Solución del Problema 14. La respuesta es 10. Si eliminamos los números 1, 2, 3, $4, \ldots, 10$, el producto de los restantes números es $11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$ y es fácil ver que este número es múltiplo de cada uno de los números $1, 2, 3, \ldots, 15$. Demostraremos que no se pueden eliminar más de 10 números. Para esto, basta demostrar que no se pueden eliminar 11 números.
Si eliminamos 11 números, entonces nos quedan 4 números. Como el producto de los restantes números debe ser múltiplo de 11 y de 13, los números 11 y 13 deben ser parte de los 4 que no son eliminados. También debemos tener al menos un múltiplo de 7, ya sea 7 o 14. Entonces, el cuarto número debe ser múltiplo de 4 (para que el producto sea múltiplo de 8), múltiplo de 5 y múltiplo de 9, lo cual es imposible. Por lo tanto, a lo más podemos quitar 10 números.

Solución del Problema 15. La respuesta es 34. Consideremos el lugar donde está la estrella en la primera fila. Hay 4 posibles lugares. Por simetría, solo tenemos que considerar dos casos, el caso donde la estrella está en una esquina y el caso donde no está en una esquina.

Caso 1: Supongamos que la estrella está en una esquina. Sin pérdida de generalidad, supongamos que está en la columna 1.

	1	0	2	2	0	1
1	★	·	·	·	·	·
0	·	·	·	·	·	·
2	·	·			·	
2	·	·			·	
0	·	·	·	·	·	·
1	·	·			·	

Ahora consideremos las estrellas de las filas 3 y 4. Para cada una de estas filas, hay 3 maneras de poner 2 estrellas: en las columnas $\{3,4\}$, $\{3,6\}$ o $\{4,6\}$. Sin embargo, no todas estas $3 \times 3 = 9$ combinaciones son válidas, ya que la columna 6 solo puede tener una estrella. Restando las $2 \times 2 = 4$ combinaciones de las filas 3 y 4 que tienen estrellas en la columna 6, obtenemos $9 - 4 = 5$ combinaciones para poner las estrellas en las filas 3 y 4. Para cada una de estas 5 combinaciones, podemos poner una estrella en la última fila escogiendo la columna que no ha sido usada.

Caso 2: Supongamos que la estrella no está en una esquina. Sin pérdida de generalidad, la ponemos en la columna 3.

	1	0	2	2	0	1
1	·	·	★	·	·	·
0	·	·	·	·	·	·
2		·	·		·	
2		·	·		·	
0	·	·	·	·	·	·
1		·	·		·	

En este momento, las columnas $1, 3, 4, 6$ no están llenas. Consideremos las estrellas en la fila 3. Hay 6 maneras de poner 2 estrellas: en las columnas $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,6\}$, $\{3,4\}$, $\{3,6\}$ o $\{4,6\}$.
Subcaso 2a: Si escogemos las columnas $\{1,3\}$, $\{1,6\}$ o $\{3,6\}$, poniendo las estrellas nos lleva a que ambas columnas estarán llenas, dejando solo 2 columnas no llenas para poner estrellas en la fila 4. Por ejemplo, si ponemos las estrellas de la fila 3 en las columnas $\{1,3\}$, entonces las columnas 1 y 3 estarán llenas y deja solo una manera para poner las estrellas de la fila 4: en las columnas $\{4,6\}$. En este subcaso, hay 3 maneras de poner las estrellas en las filas 3 y 4.
Subcaso 2b: Si escogemos las columnas $\{1,4\}$, $\{3,4\}$ o $\{4,6\}$, al poner las estrellas solo se llena una columna (la columna 4 puede tener otra estrella), dejando 3 columnas no llenas para poner estrellas en la fila 4. Por ejemplo, si ponemos las estrellas de la fila 3 en las columnas $\{4,6\}$, entonces la columna 6 está llena, mientras que las columnas

1, 3 y 4 no lo están. Por lo tanto, hay 3 maneras de colocar las dos estrellas de la fila 4: en las columnas $\{1, 3\}, \{1, 4\}$ o $\{3, 4\}$. En este subcaso hay $3 \times 3 = 9$ maneras de colocar las estrellas en las filas 3 y 4.
Para cada una de estas $3 + 9 = 12$ combinaciones, podemos poner una estrella en la última fila de la columna que no está llena.
Finalmente, por simetría, en total hay $2 \times (5 + 12) = 34$ maneras de colocar las estrellas.

Soluciones del Examen por Equipos

Solución del Problema 1. El segundo niño cambia 2022 a $2 \times 0 \times 2 \times 2 + 12 = 12$. El tercer niño cambia el 12 al $1 \times 2 + 12 = 14$. El cuarto niño cambia el 14 al $1 \times 4 + 12 = 16$. El quinto niño cambia el 16 al $1 \times 6 + 12 = 18$. El sexto niño cambia el 18 al $1 \times 8 + 12 = 20$. El séptimo niño cambia el 20 al $2 \times 0 + 12 = 12$. Entonces, la secuencia de números es cíclica de periodo 5, a partir del segundo niño: $12, 14, 16, 18, 20, 12, 14, 16, \ldots$ Como $58 = 11 \times 5 + 3$, el número escrito por el $59°$ niño, es el mismo que el número escrito por el cuarto niño, que es 16.

Solución del Problema 2. Llamemos a las regiones resaltadas en negrita, *jaulas*. Diremos que una jaula es *aditiva*, si la suma de sus números es igual a 12 y, diremos que es *multiplicativa*, si el producto de sus números es igual a 12. Como $1 + 2 + 3 + 4 < 12$, las dos jaulas de 3×1 deben ser multiplicativas. Demostraremos que las otras dos jaulas son aditivas. Nombremos a los números de las casillas de la cuadrícula como se muestra a continuación.

a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	b_2	b_3	b_4
c_1	c_2	c_3	c_4
d_1	d_2	d_3	d_4

Como $a_1 \times a_2 \times a_3 = 12$, tenemos que $a_4 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{a_1 \times a_2 \times a_3} = \frac{24}{12} = 2$. Análogamente, obtenemos que $d_1 = 2$. Ahora, la jaula que tiene 6 casillas, tiene tres números en la segunda fila, entonces su producto es al menos $1 \times 2 \times 3 = 6$ y tiene 2 elementos en la cuarta fila cuyo producto es al menos $1 \times 2 = 2$. Entonces, el producto de los 6 números en esta jaula es al menos $2 \times 6 \times 2 = 24 > 12$. Por lo tanto, la jaula de 6 casillas es aditiva. Para que la jaula de 4 casillas sea multiplicativa, requeriría que b_1, c_1, c_2 fueran $3, 2, 1$ para que su producto sea 6, pero entonces en la jaula de 6 casillas quedan los números $1, 2, 2, 3, 4$ y 4 cuya suma es mayor que 12. Por lo tanto, la jaula de 4 casillas también es aditiva. Como la primera y la última columnas (y la primera y última filas) ya tienen un 2, entonces hay dos posibilidades: que $b_3 = 2$ y $c_2 = 2$ o que $b_2 = 2$ y $c_3 = 2$. Si $b_3 = 2$ y $c_2 = 2$, entonces $b_1 + c_1 = 8$, lo cual implica que $b_1 = c_1 = 4$, que es imposible. Luego, $b_2 = 2$ y $c_3 = 2$. Como $b_1 + c_1 + c_2 = 10$, estos tres números tienen que ser 3, 3 y 4. Con esta información ya podemos completar la cuadrícula.

1	4	3	2
3	2	1	4
4	3	2	1
2	1	4	3

Solución del Problema 3. Reesribamos a los números de la cuadrícula infinita como $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$ de manera continua, es decir, escribimos a los enteros positivos. Observemos que los números en la dirección sureste comenzando con el 1 son: $1 = 1 \times 1$, $9 = 3 \times 3$, $25 = 5 \times 5$, $49 = 7 \times 7, \ldots$

	37	36	35	34	33	32	31	
	38	17	16	15	14	13	30	
	39	18	5	4	3	12	29	
	40	19	6	1	2	11	28	
	41	20	7	8	9	10	27	
	42	21	22	23	24	25	26	
	43	44	45	46	47	48	49	$\cdots$

También podemos observar lo siguiente:

- El número que está una casilla abajo del 1 es $3^2 - 1 = 8$.
- El número que está 2 casillas debajo del 1 es $5^2 - 2 = 23$.
- El número que está 3 casillas debajo del 1 es $7^2 - 3 = 46$.

En general, el número que está n casillas debajo del 1 es $(2n+1)^2 - n$. Así que el número que está 2022 casillas debajo del 1 es $4045^2 - 2022 = 16360003$. Por lo tanto, en la cuadrícula original la respuesta será el residuo de dividir al número 16360003 entre 7, el cual es fácil ver que es 2.

Solución del Problema 4. En la cadena resultante, a lo más un dígito puede aparecer un número impar de veces.

- Si $n \leq 9$, el 0 y el 1 aparecen exactamente una vez.
- Si $10 \leq n \leq 17$, el 8 y el 9 aparecen exactamente una vez.
- Si $n = 18$, el 9 aparece exactamente una vez, mientras que el 1 aparece exactamente once veces.
- Si $n = 19$, cada uno de $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y 9 aparece exactamente dos veces, mientras que el 1 aparece exactamente doce veces.

Por lo tanto, el valor mínimo de n es al menos 19. Podemos tener $n = 19$ con la cadena 918716514312110011213415617819, la cual está generada por los números 9, 18, 7, 16, 5, 14, 3, 12, 1, 10, 0, 11, 2, 13, 4, 15, 6, 17, 8 y 19.

Solución del Problema 5. Hay tres tipos de números buenos: $\overline{AABB}$, $\overline{ABAB}$ y $\overline{ABBA}$, donde $A \neq B$. Contemos en cada caso.

a) Números buenos de la forma $\overline{AABB}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{AABB} &= 10^3 \times A + 10^2 \times A + 10 \times B + B \\ &= A(10^3 + 10^2) + B(10 + 1) = 1100A + 11B = 11(100A + B) \\ &= 11 \times \overline{A0B}.\end{aligned}$$

Como $\overline{A0B} = 100A + B = 101A - A + B$ y $A \neq B$, tenemos que $\overline{A0B}$ no puede ser múltiplo de 101. Luego, el número $\overline{AABB}$ tampoco es múltiplo de 101 si $A \neq B$, lo que significa que tiene que ser divisible por 7. Hay 11 números de la forma $\overline{A0B}$, con $A \neq B$, que son múltiplos de 7: 105, 203, 301, 308, 406, 504, 602, 609, 700, 805 y 903. Cada uno de estos nos da un múltiplo de 7 de la forma $\overline{AABB}$, con $A \neq B$, que no es múltiplo de 101.

b) Números buenos de la forma $\overline{ABAB}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{ABAB} &= 10^3 \times A + 10^2 \times B + 10 \times A + B \\ &= (10^3 + 10)A + (10^2 + 1)B = 1010 \times A + 101 \times B = 101(10A + B) \\ &= 101 \times \overline{AB}\end{aligned}$$

es múltiplo de 101. Entonces tenemos que evitar los múltiplos de 7 y los casos donde $A = B$. Hay 90 números de dos dígitos, de los cuales 9 son de la forma $\overline{AA}$ y 13 son múltiplos de 7. Como el 77 está contado en ambos casos, tenemos $90 - 13 - 9 + 1 = 69$ números de la forma $\overline{AB}$ con $A \neq B$ que no son múltiplos de 7. Luego, hay 69 números de la forma $\overline{ABAB}$, con $A \neq B$, que son múltiplos de 101 pero no son múltiplos de 7.

c) Números buenos de la forma $\overline{ABBA}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{ABBA} &= 10^3 \times A + 10^2 \times B + 10 \times B + A \\ &= (10^3 + 1)A + (10^2 + 10)B = 1001 \times A + 110 \times B \\ &= 11 \times (91 \times A + 10 \times B).\end{aligned}$$

Como $91 \times A + 10 \times B = 101 \times A + 10(B - A)$ y $A \neq B$, este número no puede ser múltiplo de 101. Luego, tiene que ser múltiplo de 7. Como $91 = 7 \times 13$ es múltiplo de 7, $10 \times B$ debe ser múltiplo de 7. Es fácil ver que $10 \times B$ es múltiplo de 7 solo cuando $B = 0$ o $B = 7$. Si $B = 0$, tenemos 9 números de la forma $91 \times A + 10 \times B$ que son múltiplos de 7 (uno por cada dígito A del 1 al 9) y, si $B = 7$, tenemos 8 números de la forma $91 \times A + 10 \times B$ que son múltiplos de 7 (uno por cada dígito A del 1 al 9 y distinto de 7). Luego, tenemos $9 + 8 = 17$ números de la forma $91 \times A + 10 \times B$ múltiplos de 7, con $A \neq B$ y, por lo tanto, hay 17 números de la forma $\overline{ABBA}$, con $A \neq B$, que no son múltiplos de 101 y son múltiplos de 7.

En total tenemos $11 + 69 + 17 = 97$ enteros que cumplen.

Solución del Problema 6. Sea a la quinta edad. Primero ordenamos de manera creciente las edades conocidas: 19, 21, 53, 60. Considerando la quinta edad tenemos los siguientes casos:

- Si $a \leq 21$, entonces la edad de en medio es 21 que es múltiplo de 3.
- Si $21 < a < 53$ y $3 \mid a$, entonces la edad de en medio es a.
- Si $a \geq 53$, entonces la edad de en medio es 53, que no es múltiplo de 3.

Por lo tanto, considerando las restricciones del problema, debemos tener que $a < 53$. Como el promedio de las cinco edades es un entero impar, tenemos que $19+21+53+60+a = 5k$ para algún entero impar k. Luego, $a = 5k - 153 = 5(k-31)+2$, de donde a es un entero par (pues k es impar) y a deja residuo 2 al dividirse por 5. Por lo tanto, los valores posibles de a son: 2, 12, 22, 32, 42 y 52.
Ya tenemos que 2 y 12 son soluciones.
Si $a = 22$, 32, 42 o 52, entonces a es el número de en medio y, por lo tanto, $3 \mid a$, por lo que el único valor posible en este caso es $a = 42$.
Por lo tanto, la respuesta es $2 + 12 + 42 = 56$.

Solución del Problema 7. Notemos que se jugaron en total 20 puntos en el torneo.

- Como Boris empató todos sus juegos, Boris tuvo exactamente 4 puntos.
- Clark ganó exactamente dos juegos, así que su puntuación total es 5 o 6 puntos. Si Clark tuviera 6 puntos, entonces Andy, Dick y Eric conseguirían 10 puntos entre los tres, mientras que el jugador con menos puntos tendría al menos 3 (porque empató con Boris y le ganó a Eric), lo cual no puede ser ya que $10 < 3 + 4 + 4$ (notemos que el jugador en último lugar no empató con nadie). Por lo tanto, Clark obtuvo 5 puntos.
- Boris no puede ser último lugar porque de ser así, la suma de los puntos de los cinco jugadores sería mayor que 20, lo cual es imposible.
- Dado que Eric no es último lugar y que Dick está arriba de Andy por un punto, Andy debe ser el último lugar.
- Como Andy le ganó a Eric y empató con Boris, tiene al menos 3 puntos.
- Dick tiene al menos $3 + 1 = 4$ puntos. Ahora, sabemos que Eric tiene a lo más $20 - 5 - 4 - 4 - 3 = 4$ puntos y no es último lugar, lo que significa que Eric tiene exactamente 4 puntos. Luego, Andy tiene 3 puntos y Dick tiene 4 puntos.

En la siguiente tabla resumimos lo anterior.

	Andy	Boris	Clark	Dick	Eric	**Total**
Andy		1	0	0	2	3
Boris	1		1	1	1	4
Clark	2	1				5
Dick	2	1				4
Eric	0	1				4

- En los juegos de Eric contra Clark y Eric contra Dick, Eric ganó un juego y empató otro. Pero Eric no puede empatar con Clark, porque entonces Clark no tendría dos victorias (su último juego sería empate para llegar a 5 puntos). Entonces, Eric le ganó a Clark y empató con Dick.

Con esta información ya podemos llenar la tabla y confirmar que $\overline{abcde} = 34544$.

	Andy	Boris	Clark	Dick	Eric	**Total**
Andy		1	0	0	2	3
Boris	1		1	1	1	4
Clark	2	1		2	0	5
Dick	2	1	0		1	4
Eric	0	1	2	1		4

Solución del Problema 8. Observemos que para $AB = 8$ cm, $BC = 7$ cm, $HM = 6$ cm, $GH = 5$ cm, $AE = 4$ cm, $FG = 3$ cm, $EF = 2$ cm y $MC = 1$ cm, el área de la región no sombreada es igual a 36 cm^2. Demostraremos que esta es el área máxima.
Sean $a = AE$, $b = EF$, $c = FG$, $d = GH$, $e = HM$ y $f = MC$. Entonces, el área no sombreada es

$$(AB - f) \times e - b \times c.$$

Para que esta área sea máxima, necesitamos que AB sea lo más grande posible. Si $AB \leq 6$ cm, entonces

$$(AB - f) \times e - b \times c \leq (6 - f)e - bc < (6 - f)e \leq (6 - 1)7 = 35 < 36 \text{ cm}^2,$$

ya que $e < BC \leq 8$ cm.
Luego, tenemos dos casos: $AB = 7$ cm o $AB = 8$ cm.
Si $AB = 7$ cm, entonces $BC = 8$ cm y $e \leq 6$ cm. Por lo tanto,

$$(AB - f) \times e - b \times c \leq (7 - 1) \times 6 - b \times c < 36 \text{ cm}^2.$$

Si $AB = 8$ cm, entonces $b + d + f = 8 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1$. Como $BC > e > c$ y $BC > a$, debemos tener que $BC = 7$ cm. Entonces, $e \leq 6$ cm.
Si $f = 1$ cm, entonces uno de b o c es al menos 2 y el otro es al menos 3, lo cual implica que

$$(AB - f) \times e - b \times c \leq (8 - 1) \times 6 - b \times c \leq 42 - b \times c \leq 36 \text{ cm}^2.$$

Si $f \geq 2$ cm, entonces

$$(AB - f) \times e - b \times c \leq (8 - 2) \times 6 - b \times c < 36 \text{ cm}^2.$$

Por lo tanto, el área máxima de la región no sombreada es 36 cm^2.
Ahora, si $AB = 8$ cm, $BC = 7$ cm, $AE = 6$ cm, $MC = 5$ cm, $HM = 4$ cm, $FG = 3$ cm, $EF = 2$ cm y $GH = 1$ cm, entonces el área no sombreada es igual a 6 cm^2. Demostraremos que esta es el área mínima.
El área de la región no sombreada es $DM \times DE + GH \times FG$. Para que esta área sea mínima, necesitamos que DM sea lo más pequeño posible.
Observemos que $DM = EF + GH \geq 1 + 2 = 3$ cm, $HM > GF$ y $DE = HM - GF \geq 1$ cm.
Si $DM = 3 = 1 + 2$ cm, entonces la longitud mínima de HM es 4 cm. Por lo tanto,

$$DM \times DE + GH \times FG \geq 3 \times 1 + 1 \times (4 - 1) = 6 \text{ cm}^2.$$

Si $DM = 4 = 1 + 3$ cm, entonces la longitud mínima de HM es 4 cm. Por lo tanto,

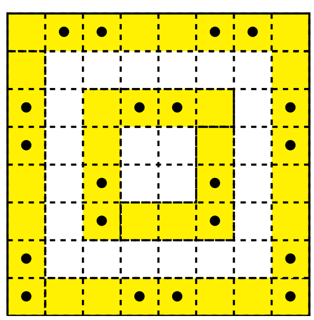
$$DM \times DE + GH \times FG \geq 4 \times 1 + 1 \times (4 - 1) = 7 > 6 \text{ cm}^2.$$

Si $DM \geq 5$ cm, entonces

$$DM \times DE + GH \times FG > 5 \times 1 + 1 \times 1 = 6 \text{ cm}^2.$$

Por lo tanto, el área mínima de la región no sombreada es 6 cm^2.

Solución del Problema 9. En la siguiente figura, hemos pintado de color amarillo 28 casillas en la frontera del tablero y otras 12 casillas en el interior del tablero, formando dos anillos. En cada anillo, marcamos con puntos 2 casillas, luego saltamos 2 casillas y marcamos con puntos las siguientes 2 casillas y así sucesivamente.



A lo más, 2 insectos que comienzan en las casillas pintadas pueden terminar en la misma casilla. Por lo tanto, el número de casillas con insectos es al menos $\frac{28+12}{2} = 20$, de modo que a lo más $64 - 20 = 44$ casillas pueden estar sin insectos. Dado que cada insecto puede saltar hasta exactamente una casilla marcada con un punto, el número máximo de casillas sin insectos es 44.

Solución del Problema 10. Las factorizaciones de los números son: $2021 = 41 \times 43$, $2022 = 2 \times 3 \times 337$, $2023 = 7 \times 17^2$, $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$, $2025 = 5^2 \times 3^4$, $2026 = 2 \times 1013$ y 2027 es un número primo.

Como 2 es un factor común de los números pares, los números pares no pueden ser adyacentes. Además, no hay factores en común entre cualesquiera dos de los números 2021, 2023, 2025 y 2027, así que podemos permutar estos cuatro números impares. Hay $4! = 24$ maneras de permutarlos. En cada una de estas 24 permutaciones, hay cinco posiciones donde podemos colocar los otros 3 números, ya sea al inicio o al final de la permutación, o entre dos números permutados. En cada una de esas posiciones se puede poner a lo más un número par. Como el factor 3 es común en 2022 y 2025, hay 3 maneras de colocar el 2022 (evitando estar al lado del 2025). Ahora hay 6 posiciones, pero dos de ellas no pueden tener a un número par (pues serían adyacentes al 2022). Entonces hay 4 posiciones y podemos acomodar los dos números restantes de $4 \times 3 = 12$ maneras en esas posiciones.
Por lo tanto, en total hay $24 \times 3 \times 12 = 864$ arreglos distintos.