EL TEOREMA DE BOLYAI-GERWIEN

Angie Damián – José Hernández

Introducción

El tema del presente escrito es un notable resultado de la geometría moderna conocido como Teorema de Bolyai-Gerwien. Una manera en que este teorema puede ser formulado es como sigue: *Dados cualesquiera dos polígonos de la misma área siempre es posible cortar uno de ellos en un número finito de piezas poligonales de tal manera que estas piezas puedan reacomodarse para conformar el otro polígono.*

El Teorema de Bolyai-Gerwien tiene una historia un tanto esquiva. De acuerdo con lo que se lee en [4], el matemático húngaro Farkas Bolyai (1775–1856: padre de János Bolyai, uno de los pioneros de las geometrías no euclidianas) es quien se pregunta por vez primera sobre la validez del resultado que nos ocupa; empero, Stewart data la primera demostración del teorema en 1807 y se la atribuye al matemático escocés William Wallace (1768–1843: ¡homónimo de Corazón Valiente!). En concordancia con otros autores, Stewart añade que en 1833, Paul Gerwien—teniente, en ese entonces, de un regimiento prusiano de infantería—conjetura y demuestra por cuenta propia el resultado. Algo que dicho autor ya no menciona pero que puede encontrarse en otras fuentes, por ejemplo en [1], es que entre 1832 y 1833 e independientemente de Wallace y Gerwien, Bolyai logra demostrar también el teorema (el cual, a la postre, sería denominado Teorema de Bolyai-Gerwien por algunos autores y Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien por otros tantos).

Demostración

Empezaremos por definir el concepto de *equidescomponibilidad de polígonos*, el cual nos permitirá formular de manera precisa el enunciado del Teorema de Bolyai-Gerwien.

Definición. Sean F y G dos polígonos. Decimos que F y G son *equidescomponibles* si existen polígonos $F_1, F_2, \dots, F_k$ y $H_1, H_2, \dots, H_k$ tales que

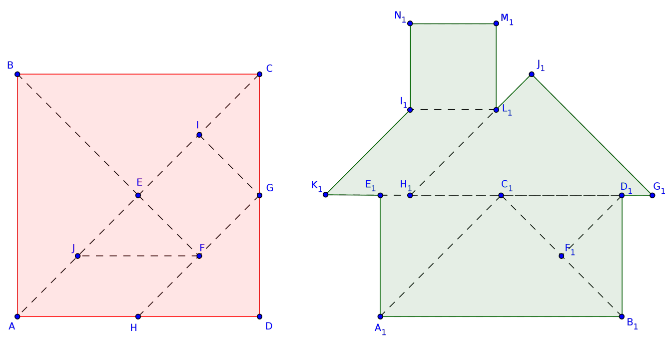
$$F = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k, \quad H = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_k$$

y además se verifican las siguientes condiciones:

i) Si $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ son distintos entonces los polígonos F_i y F_j (resp. H_i y H_j) se intersecan, si acaso, en vértices o lados.

ii) Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ se cumple que $F_i \cong H_i$ (i.e., F_i y H_i son congruentes).

Nótese que, intuitivamente, lo que está codificando el concepto de *equidescomponibilidad* es el hecho de que el polígono F sea susceptible de ser dividido en polígonos *más pequeños* $F_1, F_2, \dots, F_k$ los cuales, al ser reacomodados, den lugar al polígono G. Una fuente de ilustraciones interesantes de equidescomponibilidad la proporciona el juego chino conocido como TANGRAM. El juego consiste en reacomodar las 7 piezas (cinco de ellas son triángulos, entre los que hay dos pares de triángulos congruentes, una es un paralelogramo y otra un cuadrado) en que está divido un cuadrado fijo del plano para formar un polígono cuya silueta tiene una forma dada. Por ejemplo: en la figura que a continuación aparece se indica cómo se han de reacomodar las piezas del TANGRAM para obtener el polígono *en forma de casita* de la derecha:



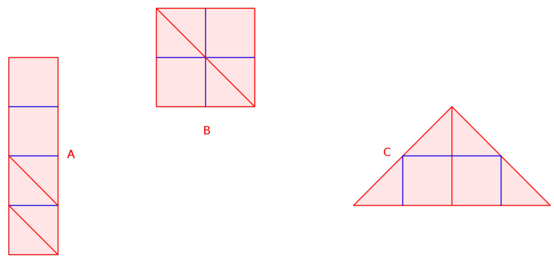
En la figura queda de manifiesto también que los polígonos $ABCD$ y $A_1E_1K_1I_1N_1M_1L_1J_1G_1D_1B_1$ son equidescomponibles.

Notación. En lo sucesivo, con $F \sim G$ estaremos denotando que F y G son polígonos equidescomponibles. Por otro lado, si $F_1, F_2, \ldots, F_k$ son polígonos entonces mediante la igualdad $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_k$ estaremos denotando que $F = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k$ y que, además, los polígonos $F_1, F_2, \ldots, F_k$ satisfacen la condición i) en la definición de equidescomponibilidad.

Algo que puede concluirse, sin mucho esfuerzo, es que cualesquiera dos polígonos equidescomponibles tienen la misma área. El Teorema de Bolyai-Gerwien lo que dice, básicamente, es que la afirmación recíproca también tiene lugar: esto es, el Teorema de Bolyai-Gerwien garantiza que *cualesquiera dos polígonos de la misma área son equidescomponibles.* Para demostrar el teorema de Bolyai-Gerwien requeriremos de tres lemas preliminares. Los primeros dos se establecen fácilmente y el tercero de ellos es medular en la demostración en sí del Teorema de Bolyai-Gerwien.

Lema 1. Si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$.

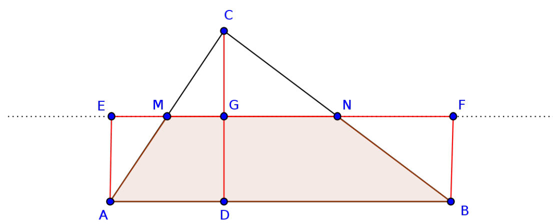
Demostración. En efecto, si trazamos en el polígono B las líneas que lo dividen en las piezas de las cuales se puede componer el polígono A (en el ejemplo de la figura, estas líneas son las que aparecen en azul dentro del cuadrado B) y después trazamos las líneas que lo dividen en las piezas a partir de las cuales se puede conformar el polígono C (en nuestro ejemplo, para obtener el triángulo C a partir del cuadrado B basta con cortar a B siguiendo la diagonal que aparece en rojo), entonces tenemos que unas y otras líneas dividen conjuntamente al polígono B en piezas más pequeñas las cuales pueden reensamblarse para dar lugar tanto a A como a C. Ergo, $A \sim C$.



□

Lema 2. Cualquier triángulo es equidescomponible con algún rectángulo.

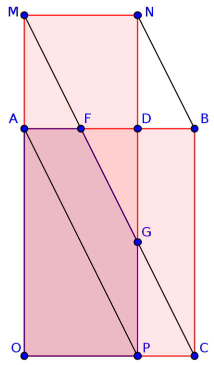
Demostración. Supongamos que, en el triángulo ABC, el mayor de sus lados es AB. Tracemos la altura por C de este triángulo y llamemos D al pie de la altura. Como AB es el lado mayor del triángulo ABC entonces D está entre A y B. Tracemos ahora la paralela MN a AB por el punto medio de CD y las perpendiculares a MN por A y B. Si suponemos que las perpendiculares anteriores cortan a MN en E y F, respectivamente, entonces el diagrama que representa lo hecho hasta este momento luce de la siguiente manera:



Utilizando las especificaciones hechas al momento de realizar los trazos auxiliares, podemos establecer que $\triangle AEM \cong \triangle CGM$ y que $\triangle CGN \cong \triangle BFN$. Puesto que tanto el triángulo ABC como el rectángulo $ABFE$ están conformados por el trapecio $ABNM$ y por triángulos congruentes a los triángulos AEM y BFN, concluimos que el triángulo ABC y el rectángulo $ABFE$ son equidescomponibles. □

Lema 3. Cualesquiera dos rectángulos de la misma área son equidescomponibles.

Demostración. Consideremos dos rectángulos $OMNP$ y $OABC$ de la misma área. Supongamos que estos ángulos tienen un ángulo recto en común, tal como se muestra en la figura:



Si $\overline{OA} = h_1$, $\overline{OC} = l_1$, $\overline{OM} = h_2$ y $\overline{OP} = l_2$ entonces de la hipótesis sobre las áreas de los rectángulos se sigue que

$$l_1 \cdot h_1 = l_2 \cdot h_2.$$

Esta igualdad se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{l_1}{h_2} = \frac{l_2}{h_1}. \tag{1}$$

El recíproco del teorema de Tales (veáse, por ejemplo, la página 331 de [3]) nos permite afirmar entonces que

$$AP \parallel MC.$$

Por otro lado, puede verse que la igualdad en (1) implica también que

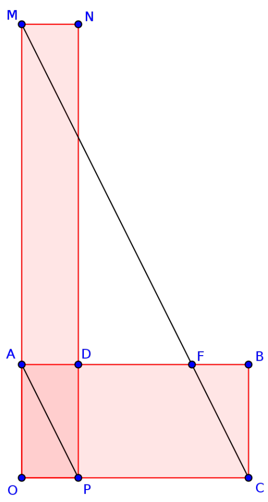
$$\frac{l_1 - l_2}{h_2 - h_1} = \frac{l_2}{h_1}. \tag{2}$$

De (2) y el recíproco del teorema Tales se desprende que

$$NB \parallel AP.$$

De esto y el paralelismo de AP y MC se colige que $MC \parallel NB$. Luego, si MC es como en la figura de arriba (esto es, **si** MC **cruza al rectángulo** $OADP$) entonces la equidescomponibilidad entre los rectángulos $OMNP$ y $OABC$ se verifica pues, en tal caso, tenemos que $OMNP = OAFGP + \triangle MAF + \triangle NMG$, $OABC = OAFGP + \triangle PGC + \triangle FBC$ y, además, $OAFGP \cong OAFGP$, $\triangle MAF \cong \triangle PGC$ y $\triangle NMG \cong \triangle FBC$ (nótese que el paralelismo de MC y NB es instrumental para el establecimiento de la congruencia de $\triangle NMG$ y $\triangle FBC$).

Consideremos ahora el caso en el que el segmento MC **no corta al rectángulo** $OADP$, tal como ocurre en la siguiente ilustración:



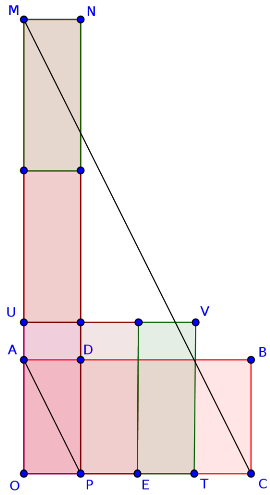
Puesto que $\overline{AD} + \overline{FB} < \overline{AB}$ y $\overline{FB} = \overline{AD}$ entonces[1]

$$l_1 = \overline{AB} > \overline{AD} + \overline{FB} = 2\overline{AD} = 2l_2.$$

Sea E el punto medio del segmento OC y sea k el menor número natural que satisface la desigualdad

$$k \cdot \overline{OP} > \overline{OE}.$$

Sea T el extremo final del segmento sobre OC que inicia en O y que tiene por longitud $k \cdot \overline{OP}$. Dividamos el rectángulo $OMNP$ en k partes congruentes. A continuación, lo que hacemos es dibujar, sobre el lado OC de $OABC$ y adyacentes al rectángulo $OADP$, *copias* de los rectángulos que aparecen en la división hecha del rectángulo $OMNP$. El proceso anterior se ilustra en la figura de abajo en un caso en el que $k = 3$:



Esto nos genera un rectángulo $OUVT$ (equidescomponible con $OMNP$) y cuya base OT es tal que se satisface la desigualdad

$$\overline{OC} = 2\overline{OE} < 2(k \cdot \overline{OP}) = 2\overline{OT}.$$

Pero entonces se puede aplicar lo hecho en el caso cuando MC **sí cruzaba al rectángulo** $OADP$ para establecer que $OABC \sim OUVT$. De esto, la equidecomponibilidad de $OUVT$ y $OMNP$ y el **Lema 1** se concluye que

$$OABC \sim OMNP.$$

$\square$

Estamos finalmente en posición de demostrar el resultado central del trabajo:

Teorema de Bolyai-Gerwien. Cualesquiera dos polígonos de la misma área son equidescomponibles.

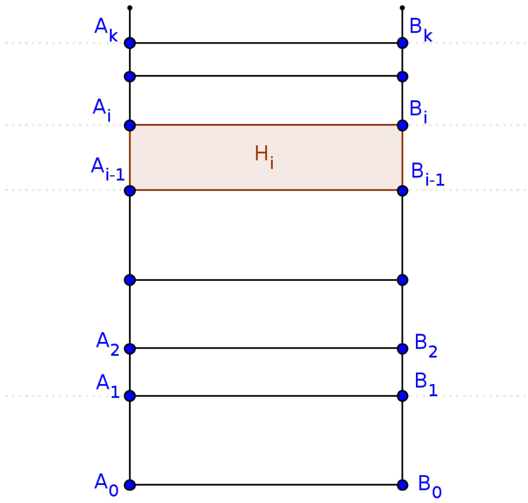
Demostración. Cualquier polígono F puede ser descompuesto en un número finito de triángulos y, por el **Lema 2**, cada uno de los triángulos en la descomposición de F es equidescomponible con algún rectángulo. Así, podemos suponer que

$$F \sim P_1 + \cdots + P_k \tag{3}$$

para algunos rectángulos $P_1, \ldots, P_k$.

Fijemos un segmento A_0B_0 en el plano y levantemos en cada extremo del segmento una perpendicular a él. Tracemos a continuación segmentos $A_1B_1, \ldots, A_kB_K$ paralelos a AB y de tal suerte que para $i \in \{1, \ldots, k\}$, el rectángulo $A_{i-1}B_{i-1}B_iA_i$ (al cual nos referiremos de aquí en adelante por H_i) tenga la misma área que P_i. En el diagrama que en seguida se presenta se pueden apreciar las construcciones efectuadas:

[1] En el caso cuando MC **sí cruza al rectángulo** $OADP$, la desigualdad que se cumple es la opuesta: $l_1 \leq 2l_2$.



Del **Lema 3** se sigue que, para $i \in \{1, \ldots, k\}$, $P_i \sim H_i$. De esto y (3) se obtiene a su vez que

$$F \sim H_1 + \cdots + H_k.$$

Lo anterior demuestra que todo polígono F es equidescomponible con algún rectángulo $A_0B_0B_kA_k$. Supongamos ahora que F y G son polígonos de la misma área. Por lo hecho anteriormente tenemos que F es equidescomponible con un rectángulo $A_0B_0B_kA_k$ y que G es equidescomponible con un rectángulo $A'_0B'_0B'_kA'_k$. Puesto que F y G tienen la misma área entonces los rectángulos $A_0B_0B_kA_k$ y $A'_0B'_0B'_kA'_k$ también tienen la misma área. El **Lema 1** y el **Lema 3** nos permiten concluir entonces que

$$F \sim A_0B_0B_kA_k \sim A'_0B'_0B'_kA'_k \sim G$$

y la demostración termina. $\square$

Bibliografía

[1] A. Bogolmony, *Wallace-Bolyai-Gerwien Theorem.* En internet:

`http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/Bolyai.shtml`

[2] V. G. Boltianskii, *Hilbert's Third Problem.* V. H. Winston & Sons, Washington, D. C., 1978, págs. 49–56.

[3] E. E. Moise y F. L. Downs, Jr., *Geometría moderna.* Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.

[4] I. Stewart, *From here to infinity: A guide to today's mathematics.* Oxford University Press, 3rd. edition, pág. 169.

[5] O. F. Soto-Agreda y L. Jácome, *Cuadratura de polígonos por disección.* Revista Sigma (Depto. de Matemáticas de la Universidad de Nariño), Vol. VIII (2008), págs. 1–14.