EL POSTULADO DE BERTRAND

Resumen

El *postulado de Bertrand* es un resultado bastante peculiar en la teoría de los números primos. Al igual que muchos de los resultados clásicos en esta área de las matemáticas, el enunciado del postulado de Bertrand es bastante fácil de asimilar, pero no tan inmediato de demostrar. El objetivo básico de este escrito es exponer la demostración de Paul Erdős[1] del postulado de Bertrand.

Introducción

En un artículo[2] de 1845, el matemático francés Joseph Bertrand mencionó que había verificado la validez de la siguiente afirmación para cada número natural n en el intervalo $[1, 3\,000\,000]$:

Si $n \in \mathbb{N}$, *entonces el intervalo* $(n, 2n]$ *siempre contiene un número primo.*

Con base en esa evidencia, Bertrand dio por cierta la afirmación para todos los números naturales y la empleó en un problema en el cual trabajaba en ese momento (W. Narkiewicz en su "The development of prime number theory" especifica incluso que el problema que ocupara a Bertrand, formulado en términos modernos, es el siguiente: si n es un número natural mayor que 4 y H es un subgrupo propio del grupo simétrico S_n entonces $[\mathsf{S}_n : H] = 2$ o $[\mathsf{S}_n : H] \geq n$.). Es por esta razón que la afirmación pasó a la historia bajo el nombre de *postulado de Bertrand*. No obstante, como la verificación del postulado de Bertrand para cada $n \in [1, 3\,000\,000]$ no implicaba en automático que la afirmación fuese válida para todo número natural n, era necesario aún presentar una demostración completa de dicha afirmación. La primer persona en la historia que dió una demostración del postulado de Bertrand fue el matemático ruso Pafnuty Chebyshev en un trabajo publicado alrededor de 1850 (la referencia exacta es: P. L. Chebyshev, *Mémoire sur les nombres premiers.* Mémoires de l'Acad. Imp. Sci. de St. Pétersbourg, VII, 1850.). De ahí hubo varios matemáticos famosos que dieron demostraciones propias para el postulado de Bertrand: uno de ellos fue el genio matemático hindú Srinivasa Ramanujan en un artículo de 1919 (cf. *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, págs. 208–209). Como se mencionó en el resumen, la demostración del postulado de Bertrand que se desarrollará en este ensayo es la del prolífico matemático húngaro Paul Erdős quien, de acuerdo a varias fuentes, la presentó cuando tenía alrededor de veinte años de edad.

---

[1] P. Erdős, *Beweis eines Satzes von Tschebyschef.* Acta Litt. Sci. Szeged **5** (1932), 194–198.

[2] J. Bertrand, *Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme.* Journal de l'École Royale Polytechnique 30 Ca., Tome 18 (1845).

Demostración

Para probar el postulado de Bertrand lo que haremos es estimar inferior y superiormente los coeficientes binomiales centrales $\binom{2n}{n}$. La estimación inferior se obtiene básicamente del teorema del binomio y es la siguiente:

Proposición I. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}.$$

Demostración. Del teorema del binomio se tiene que

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}. \tag{1}$$

Por otra parte, como cada uno de los términos en la suma que aparece en (1) es menor o igual que $\binom{2n}{n}$ entonces

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \left[\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2n}\right] + \binom{2n}{1} + \cdots + \binom{2n}{2n-1} \leq (2n)\binom{2n}{n}. \tag{2}$$

La desigualdad deseada es inmediata ahora de (1) y (2). ∎

Para obtener una estimación superior se hará un análisis de la descomposición en primos del coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$ mediante la

Fórmula de Legendre. Sean N un número natural y p un número primo positivo. El exponente $\nu_p(N!)$ al que aparece p en la descomposición en primos de $N!$ es igual a

$$\sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{N}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p^3} \right\rfloor + \cdots$$

Determinemos, a manera de ejemplo, la descomposición en primos de 10!. Los primos que pueden aparacer en dicha descomposición son únicamente los números primos menores que 10: estos números primos son $2, 3, 5$ y 7. Hay que calcular ahora a $\nu_2(10!)$, $\nu_3(10!)$, $\nu_5(10!)$ y $\nu_7(10!)$. Esto lo hacemos mediante la fórmula de Legendre y obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\nu_2(10!) &= \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{2^4} \right\rfloor + \cdots = 5+2+1+0+\cdots = 8 \\
\nu_3(10!) &= \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{3^4} \right\rfloor + \cdots = 3+1+0+0+\cdots = 4 \\
\nu_5(10!) &= \left\lfloor \frac{10}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{5^4} \right\rfloor + \cdots = 2+0+0+0+\cdots = 2 \\
\nu_7(10!) &= \left\lfloor \frac{10}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{7^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{7^4} \right\rfloor + \cdots = 1+0+0+0+\cdots = 1
\end{aligned}$$

Por consiguiente, podemos concluir que

$$10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1.$$

Evidentemente, en este caso hay varias maneras de corroborar la validez de la igualdad anterior.

La fórmula de Legendre es un resultado que se discute en cualquier curso básico de teoría de números. Puede demostrarse haciendo inducción matemática sobre N. El lector interesado puede consultar una demostración alternativa de la misma en [1].

Consideremos ahora un **número primo** $p \in (1, 2n]$. De la fórmula de Legendre se sigue que

$$\nu_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor\right).$$

Por otra parte, de la definición de la función parte entera se desprende que cada término en la suma anterior es a lo más 1. Además, puesto que los sumandos son iguales a 0 cuando $p^k > 2n$ entonces

$$\nu_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leq \max\{r : p^r \leq 2n\}.$$

Hay un par de deducciones sencillas que podemos hacer a partir de esta última desigualdad:

I. Si $p > \sqrt{2n}$ entonces $\max\{r : p^r \leq 2n\} \leq 1$ y, por lo tanto, $\nu_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leq 1$.

II. Si $n \geq 3$ y p es tal que $\frac{2}{3}n < p \leq n$ entonces $\nu_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 0$. Para justificar esta aseveración lo único que debemos hacer es notar que en la fracción

$$\frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}$$

el exponente del primo p en la descomposición en primos del denominador es 2 (pues $p \leq n$ y $2p > \frac{4}{3}n > n$) y lo mismo sucede al hacer la descomposición en primos del numerador (pues $p, 2p \leq n$, $3p > 2n$ y el hecho que $n \geq 3$ implica que $p > 2$).

De lo anterior se sigue que si $n \geq 3$ entonces

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \left(\prod_{p\leq\sqrt{2n}} p^{\nu_p\left(\binom{2n}{n}\right)}\right)\left(\prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p^{\nu_p\left(\binom{2n}{n}\right)}\right)\left(\prod_{\frac{2}{3}n<p\leq n} p^{\nu_p\left(\binom{2n}{n}\right)}\right)\left(\prod_{n<p\leq 2n} p^{\nu_p\left(\binom{2n}{n}\right)}\right)\\ &\leq \left(\prod_{p\leq\sqrt{2n}} 2n\right)\left(\prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p\right)\left(\prod_{\frac{2}{3}n<p\leq n} p^0\right)\left(\prod_{n<p\leq 2n} p\right). \qquad (3)\end{aligned}$$

La expresión dentro del primer par de paréntesis en (3) se puede acotar superiormente por $(2n)^{\sqrt{2n}}$, el producto dentro del tercer par de paréntesis es exactamente igual a 1 y el producto dentro del cuarto par de paréntesis está relacionado precisamente con los números primos en el intervalo $(n, 2n]$. En resumidas cuentas, lo que se tiene es

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}}\left(\prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p\right)\left(\prod_{n<p\leq 2n} p\right). \qquad (4)$$

¡Es en este momento donde la relación entre el problema de la estimación de los coeficientes binomiales centrales y la existencia de números primos en $(n, 2n]$ se hace más que patente!

El siguiente lema nos permitirá estimar el producto dentro del segundo par de paréntesis en (3).

Lema (Erdős-Kalmár). Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\prod_{p \leq n} p \leq 4^{n-1}.$$

Demostración. Procederemos por inducción completa sobre $n = 1$. Si $n = 1$ o $n = 2$ entonces la desigualdad es cierta. Supongamos que se cumple para cada número natural menor o igual que n: demostrémosla para $n + 1$.
Si $n + 1$ es par entonces es claro que

$$\prod_{p \leq n+1} p = \prod_{p \leq n} p \leq 4^{n-1} < 4^n.$$

Si $n + 1$ es un número impar entonces $n = 2k$ para algún $k > 1$. En este caso se tiene que

$$\prod_{p \leq n+1} p = \prod_{p \leq 2k+1} p = \left(\prod_{p \leq k+1} p\right)\left(\prod_{k+1 < p \leq 2k+1} p\right) \leq 4^k \binom{2k+1}{k} \leq 4^k \cdot 2^{2k} = 4^{2k} = 4^n.$$

Todas las desigualdades en la línea anterior se pueden justificar fácilmente. De hecho, la desigualdad

$$\prod_{p \leq k+1} p \leq 4^k$$

se cumple en virtud de la hipótesis de inducción. La desigualdad

$$\prod_{k+1 < p \leq 2k+1} p \leq \binom{2k+1}{k}$$

es consecuencia de que el coeficiente binomial $\binom{2k+1}{k}$ es divisible por cada uno de los números primos en el intervalo $(k + 1, 2k + 1]$. Finalmente, la desigualdad

$$\binom{2k+1}{k} \leq 2^{2k}$$

se sigue del hecho de que $\binom{2k+1}{k}$ y $\binom{2k+1}{k+1}$ son sumandos iguales que aparecen en la expresión del lado izquierdo de la igualdad

$$\sum_{j=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{j} = 2^{2k+1}.$$

$\blacksquare$

Si aplicamos el lema recién demostrado al producto en el primer par de paréntesis en (4) se obtiene que

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \left(\prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p \right) \left(\prod_{n<p\leq 2n} p \right) < (2n)^{\sqrt{2n}}(4^{\frac{2}{3}n}) \prod_{n<p\leq 2n} p.$$

De lo anterior y la estimación inferior para $\binom{2n}{n}$ obtenida en la **proposición I** se desprende que si $n \geq 3$ entonces

$$4^{\frac{n}{3}} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} \prod_{n<p\leq 2n} p. \tag{5}$$

Ahora bien, si suponemos que n es un número natural mayor que 3 y tal que el intervalo $(n, 2n]$ no contiene número primo alguno, entonces $\prod_{n<p\leq 2n} p = 1$ y la desigualdad en (5) deviene en

$$4^{\frac{n}{3}} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}}. \tag{6}$$

Sin embargo, esta última desigualdad es **falsa** cuando n es *suficientemente* grande. Para convencernos de esto podemos proceder como sigue:

La aplicación de una instancia de la conocida desigualdad de Bernoulli[3] nos permite asegurar que

$$2n = (\sqrt[6]{2n})^6 < (\lfloor \sqrt[6]{2n} \rfloor + 1)^6 \leq 2^{6\lfloor \sqrt[6]{2n} \rfloor} \leq 2^{6\sqrt[6]{2n}}. \tag{7}$$

Luego, si suponemos que el natural n es tal que $18 < 2\sqrt{2n}$, las desigualdades en (6) y (7) nos proporcionan que

$$2^{2n} < (2n)^{3(1+\sqrt{2n})} < 2^{\sqrt[6]{2n}(18+18\sqrt{2n})} < 2^{20\sqrt[6]{2n}\sqrt{2n}} = 2^{20(2n)^{2/3}}.$$

De esto último se sigue que $(2n)^{1/3} < 20$ y por tanto n tiene que ser menor que 4000. El establecimiento de la proposición se ha reducido entonces a analizar los intervalos $(n, 2n]$ donde n es un natural menor que 4000. Claramente, ello no significa que la proposición deba irse probando caso a caso entre todos los naturales n menores que 4000. De hecho, es suficiente con notar que

$$\mathcal{L} = \{2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001\}$$

es una lista de números primos donde cada uno es menor que dos veces el anterior. En efecto, dado $n \in [1, 4000]$, sea N igual al mayor de los primos en $\mathcal{L}$ que es menor o igual a n. Se cumple entonces que el primo siguiente a N en $\mathcal{L}$, digamos N', es mayor que n y además $N' \leq 2n$. Así , $N' \in (n, 2n]$ y el resultado se sigue. ∎

[3]Dicha desigualdad asegura que $(1 + x)^k \geq 1 + kx$ siempre que $x > -1$ y $k \in \mathbb{N}$.

Conclusión

La demostración de Erdős del postulado de Bertrand es bastante ingeniosa. De hecho, M. Aigner y G. M. Ziegler la incorporaron en su "Proofs from THE BOOK", el cual es un libro que pretende emular a un supuesto libro del creador en el que estarían compiladas las demostraciones más bellas de las matemáticas. Por supuesto y, como ya se ha mencionado antes, hay otras demostraciones del postulado de Bertrand. Se sabe incluso que se puede dar una demostración *condicional* del postulado de Bertrand a partir de la conjetura binaria de Goldbach (todo número para mayor que 2 puede expresarse como una suma de dos números primos).

Bibliografía

[1] J. Cilleruelo y A. Córdoba. *La teoría de los números.* Mondadori España, 1992.

[2] H. Ricardo. *Goldbach's conjecture implies Bertrand's Postulate.* Amer. Math. Monthly **112** (2005), p. 492.

José Hdz. Stgo.

(Primera versión del archivo: primer semestre de 2014. Última revisión: junio de 2020.)